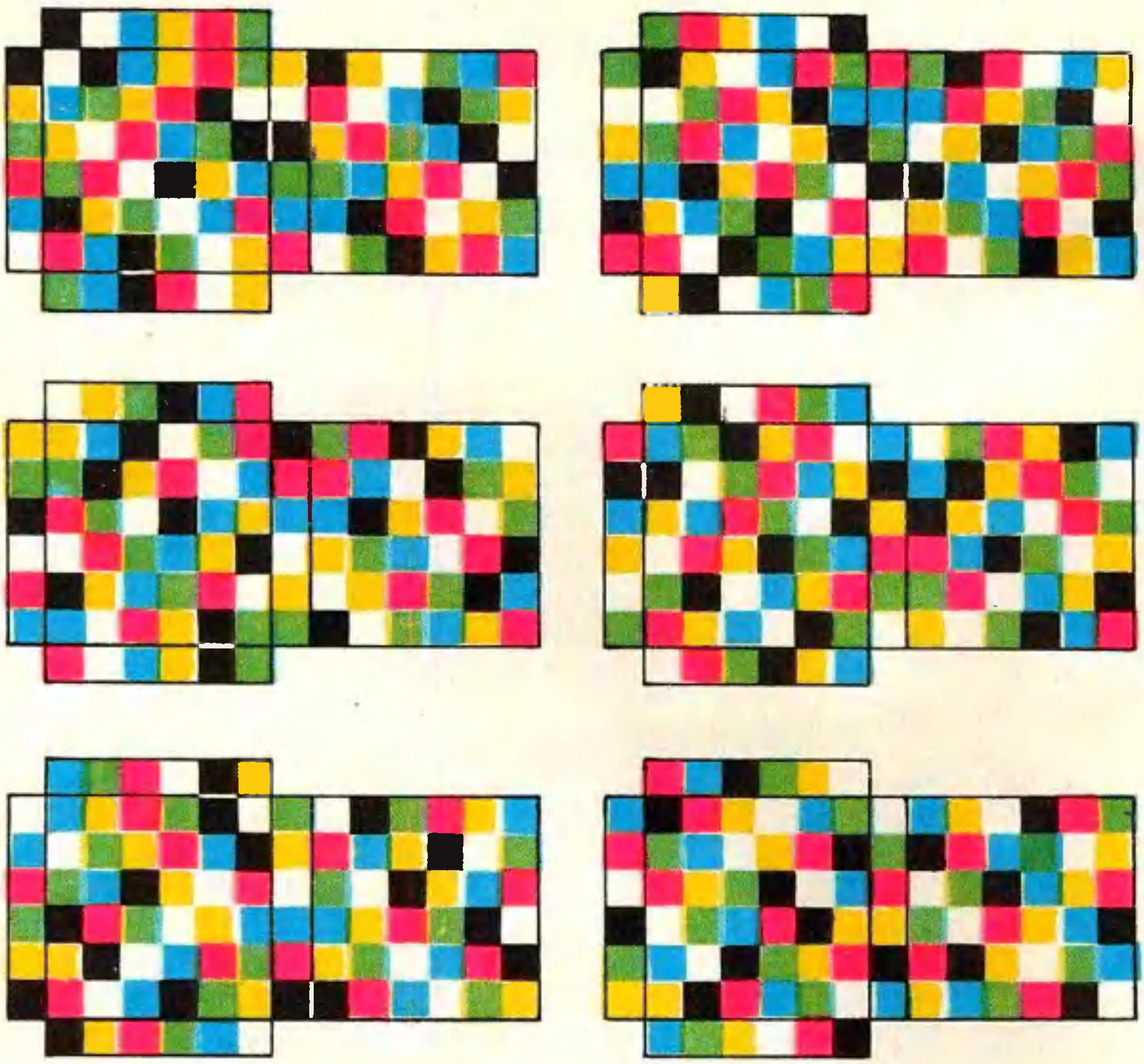
ISSN 0130-2221

Квант

5
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



ГОЛОВОЛОМКА «ЦВЕТНОЙ КУБИК»

Из прямоугольных параллелепипедов $6\times6\times1$, окрашенных в шесть различных цветов: красный, желтый, синий, зеленый, белый и черный (на рисунке приведены развертки параллелепипедов), выложите куб так, чтобы каждая грань его представляла квадрат, в котором по горизонтали, по вертикали и по диагоналям были представлены все шесть цветов (то есть каждый цвет встречался бы по одному разу).

Л. Мочалов

Основан в 1970 году

Квант

5
1980

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Победа, которая спасла мир

Прошло 35 лет с того незабываемого дня, когда наш народ впервые отпраздновал День Победы над фашистскими захватчиками. Труден был путь к этой победе. Прежде чем напасть на нашу страну, фашисты захватили всю Западную Европу и подчинили себе европейскую промышленность. Вся Европа кормила фашистские войска и снабжала их самым современным оружием. Казалось, что на всей земле нет такой силы, которая могла бы остановить фашизм, преградить его армиям путь к господству над миром. История опровергла эти прогнозы. Героический советский народ уничтожил чудовищную фашистскую военную машину и навсегда избавил человечество от фашистской диктатуры. Ни один другой народ в мире не мог бы в то время решить эту невероятно трудную историческую задачу.

Представьте себе на мгновение, что фашизм победил и во всем мире установился фашистский «новый порядок». Целые народы были бы поголовно истреблены. Народы нашей страны были бы превращены в рабов, лишенных самых элементарных человеческих прав. Каждый из вас, наши юные читатели, должен твердо помнить, чем вы обязаны погибшим в этой войне. Это они дали вам возможность нормально учиться, свободно выбирать профессию и самостоятельно строить жизнь. Не будь этой великой победы, каждый из вас по 10—12 часов в день гнул бы спину на тяжелых работах в фашистских трудовых лагерях, жил бы впроголодь, без малейшей надежды на нормальное питание, образование и личное счастье. Вам это трудно представить себе, но вашим отцам и дедам пришлось столкнуться с этой страшной возможностью лицом к лицу. Помните о тех, кто отдал свою жизнь за эту победу и гордитесь ими! Помните и о тех, кто пережил эту страшную войну, и уважайте их!

Школьники нашей страны давно уже шефствуют над могилами павших бойцов Великой Отечественной войны, разыскивают погибших воинов, проводят походы по местам боев, организуют школьные музеи боевой славы. Это справедливая дань тем, кто отстоял ваше право на свободную и счастливую жизнь. В этой работе должен участвовать каждый из вас.

Когда вы смотрите фильмы о Великой Отечественной войне, читаете книги о ее героях, многим из вас кажется, что героизм нужен был только в те годы, и вы жалеете, что опоздали родиться. Конечно, война предъявила к каждому жителю нашей страны предельно суровые требования, она нуждалась в массовом героизме, и его проявляли даже дети. Но ведь и тогда героями были не только те, кто горел в танке, таранил вражеский самолет или, спасая товарищей, грудью закрывал пулеметную амбразуру. Не меньше героизма было и в жизни тех, кто в жуткий мороз на пустырях сибирских городов восстанавливал эвакуированные заводы, вооружал, одевал, кормил наших солдат, или тех, кто оказывал сопротивление фашистам на временно оккупированных территориях. Героическими были и послевоенные годы, когда наш народ, потерявший более 20 миллионов человек, восстанавливал разрушенное войной хозяйство. Об этом героизме трудовых будней ваших родителей прекрасно рассказано в замечательных книгах Леонида Ильича Брежнева «Возрождение» и «Целина».

Героизм нужен нам и сегодня: строительство коммунистического общества, формирование нового человека потребуют от нашего народа немало героических свершений. Еще не изжиты преступность, расточительство, хищения государственного (а значит, народного!) имущества, взяточничество и некоторые другие отрицательные явления нашей жизни. И нам нужны сознательные, активные, непримиримые борцы со всеми подобными недостатками, борцы за светлые идеалы коммунизма, а не за личное сиюминутное материальное благополучие.

Наша страна была бы сейчас намного богаче, если бы не война, если бы нам не мешали строить новую жизнь. Готовясь к этой войне, наш народ сознательно жертвовал своим благосостоянием. Но в жизни существует суровая иерархия ценностей, и у нас не было другого выхода. По существу мы только еще начинаем жить в относительно благоприятной для нашей страны международной обстановке, связанной с разрядкой напряженности, с переходом на рельсы мирного сосуществования.

Научно-техническая революция вызвала к жизни оружие массового уничтожения, угрожающее всему живому на нашей планете. Но 35 лет человечество прожило без новой мировой войны, и как бы ни старались и ни стараются противники разрядки, силы мира растут и крепнут с каждым днем. Во главе этих сил стоит великий Советский Союз, который последовательно проводит ленинскую миролюбивую внешнюю политику. Весь мир признает огромный вклад, внесенный в борьбу за мир главой нашего государства Леонидом Ильичем Брежневым. Мы не только спасли человечество от кошмара фашистского «мирового порядка», но и избавили его от новой мировой войны.

Немалый вклад в эту великую победу советского народа внесла и наша наука. Многие научные работники сражались с оружием в руках в наших войсках, партизанских отрядах и отрядах народного ополчения. И в каждом научном центре, каждом вузе есть своя мемориальная плита с именами погибших героев. Но вклад науки в нашу победу намного шире. Благодаря огромному труду наших ученых перед войной и в ходе войны была полностью обновлена советская военная техника. Армия получила новые самолеты (истребители, штурмовики, пикирующие бомбардировщики), реактивные минометы («катюши»), наводившие ужас на фашистских солдат, танки «Т-34», «ИС» и «КВ», превосходившие аналогичное немецкое оружие.

Советские ученые всеми возможными путями старались приблизить нашу победу. Мы расскажем здесь лишь о некоторых работах наших физиков, математиков и механиков.

Для решения оборонных научно-технических вопросов в осажденном фашистскими войсками Ленинграде была создана специальная группа ученых, которую возглавил директор Ленинградского физико-технического института Академии наук СССР академик Абрам Федорович Иоффе. По заданию Ленинградского горкома партии в этом институте создали дешевую и эффективную зажигательную смесь, уничтожившую сотни вражеских танков, разработали новые подрывные противотанковые средства. Простые и удобные в обращении полупроводниковые термоэлектрогенераторы, сконструированные А. Ф. Иоффе и работающие от обычных керосиновых ламп, широко использовались партизанскими радистами. Сотрудник ЛФТИ Юрий Борисович Кобзарев (ныне академик) создал первую в мире радиолокационную установку.

Группа ученых того же института во главе с членом-корреспондентом АН СССР Павлом Павловичем Кобеко помогала обеспечивать надежность ледяной дороги через Ладожское озеро, единственной, связывающей Ленинград с «Большой землей», которую в те годы называли «Дорогой жизни».

Еще одна группа сотрудников Ленинградского физико-технического института, возглавляемая нынешним президентом Академии наук СССР академиком Анатолием Петровичем Александровым и впоследствии ставшим всемирно известным ученым академиком Игорем Васильевичем Курчатовым, провела на Северном, Балтийском, Черноморском и Тихоокеанском флотах очень важную работу по размагничиванию судов. Благодаря этому была полностью исключена возможность подрыва наших кораблей на вражеских магнитных минах.

Московские ученые активно участвовали в создании эффективной противовоздушной обороны столицы. Институт физических проблем АН СССР получил от Наркомата обороны задание разработать надежный и безопасный метод обезвреживания невзорвавшихся вражеских авиационных бомб. Под руководством академика Петра Леонидовича Капицы это поручение было выполнено в пятидневный срок.

Свердловские физики во главе с Сергеем Васильевичем Вонсовским (ныне академиком) и Яковом Савельевичем Шуром (позднее ставшим членом-корреспондентом АН СССР) внедрили магнитную дефектоскопию снарядов, стволов артиллерийских орудий и танковой брони, которая позволила существенно повысить надежность нашего оружия.

В разгар войны, в 1943 году, по решению партии и правительства в Москве был организован Институт атомной энергии, в состав которого вошли крупнейшие ученые-физики Советского Союза. На них была возложена задача по созданию атомного оружия.

Как писал покойный президент Академии наук СССР выдающийся советский физик академик С. И. Вавилов, «Советская техническая физика, обязанная своим появлением В. И. Ленину, с честью выдержала суровые испытания войны. Следы этой физики всюду: на самолете, танке, на подводной лодке и линкоре, в артиллерии, в руках нашего радиста, дальномерщика, в ухищрениях маскировки. Дальновидное объединение теоретических высот с конкретными техническими задачами, неуклонно проводившееся в советских физических институтах, в полной мере оправдало себя в пережитые грозные годы».

Советские математики и механики также внесли большой научный вклад в победу над врагом.

Академик Андрей Николаевич Колмогоров, используя свои работы в области теории вероятностей, создал метод определения наивыгоднейшего рассеяния артиллерийских снарядов.

При освоении больших скоростей авиация столкнулась с фактами внезапного разрушения самолетов под влиянием особого рода вибраций, получивших название флаттера. Теория этого явления, позволившая надежно защитить от него наши самолеты, была разработана Мстиславом Всеволодовичем Келдышем (впоследствии академиком и президентом АН СССР).

В послевоенные годы наши ученые проделали очень большую работу по укреплению обороноспособности Советского Союза. Их усилиями, возглавленными академиком Игорем Васильевичем Курчатовым, было создано советское атомное и термоядерное оружие и ликвидирована атомная монополия американских империалистов. Мир был избавлен от американского атомного шантажа. Под руководством академика Сергея Павловича Королева было разработано отечественное ракетное оружие. Советские ученые помогли оснастить наш флот атомными подводными лодками. Наша армия располагает сейчас всем необходимым для сокрушительного отпора любому врагу, и в этом залог нашей прекрасной будущей мирной жизни.

В. Регель, Б. Ткаченко

Размагничивание кораблей в годы Великой Отечественной войны

24 июня 1941 года в 2 часа 41 минуту в устье Финского залива подорвался на мине эсминец «Гневный». В 4 часа 21 минуту в этом же районе подорвался на мине крейсер «Максим Горький», но своим ходом пришел в Таллин. Предполагалось, что мины были неконтактными (магнитными). Противник уже в первые дни войны создал серьезную минную угрозу у выхода из советских военно-морских баз и на основных морских путях сообщения, использовав в общей сложности 1060 якорных ударных мин и до 160 донных неконтактных мин. Положение создалось угрожающее. А что же наш флот? Был ли он подготовлен к возможности минной блокады или это случилось совершенно неожиданно?

Среди многих задач оборонного значения важное место заняло размагничивание кораблей. В короткой статье нельзя подробно осветить всю эпопею размагничивания и перечислить всех участников, поскольку к решению этой проблемы, помимо научных работников, были привлечены многие военные моряки и судостроители.

Для взрыва м а г н и т н о й мины не требуется непосредственного соприкосновения ее с корпусом корабля. Взрыватель срабатывает от воздействия на него магнитного поля судна. Идея изготовления такого взрывателя столь проста, что могла возникнуть сразу после изобретения компаса и появления стальных кораблей. Каждому известно, что стрелка компаса отклоняется, если к нему поднести железный предмет. Отклонение подобной стрелки, помещенной внутри мины, можно использовать для замыкания контакта взрывателя. При соответствующем подборе чувствительности взрыв мины будет происходить в тот момент, когда корабль окажется над ней, а значит, будет поражена самая незащищенная его часть — днище. Даже большие корабли, как правило, гибнут при взрыве под ними таких мин. Кроме того, магнитные мины, лежащие на дне, не поддаются обычным методам траления, рассчитанным на подсекание и подрыв якорных мин. Установка магнитных мин может производиться не только с кораблей, но и с самолетов — в открытом море, в бухтах, гаванях, на фарватерах рек.

Эти преимущества магнитных мин перед обычными якорными контактными минами дали основание военно-морским специалистам заранее предугадать их применение в предстоящей войне, тем более, что нашим военным морякам пришлось познакомиться впервые с магнитными минами английских интервентов еще в сентябре 1919 года на Северной Двине. Уже тогда на выставленном англичанами заграждении из магнитных мин подорвалось несколько наших кораблей. Однако военные моряки быстро очистили фарватер от этих, еще сравнительно примитивных, мин.

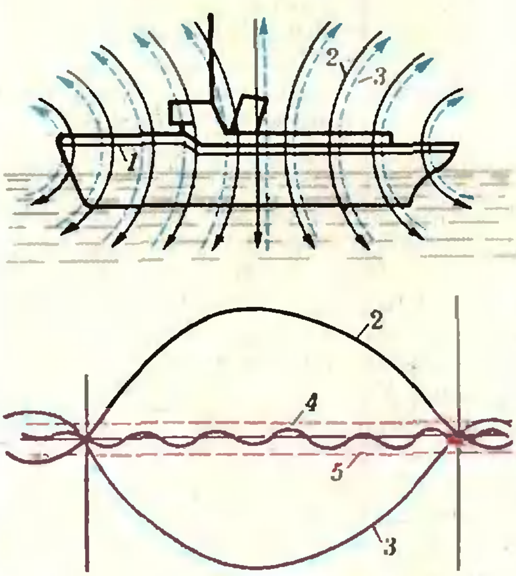
Естественно было ожидать, что в новой войне будут использоваться усовершенствованные магнитные мины: более чувствительные, с приспособлениями, затрудняющими их траление и уничтожение. Все это заставило командование Военно-Морско-

Статья была опубликована в журнале «Природа» (1975, № 4). Перепечатывается с сокращениями.

го Флота СССР поставить перед специалистами задачу — разработать методы защиты кораблей от неконтактного магнитного минного и торпедного оружия.

Эта важная работа была поручена Ленинградскому физико-техническому институту (ЛФТИ) Академии наук СССР еще в 1936 году. За ее выполнение взялись Анатолий Петрович Александров (ныне академик, директор Института атомной энергии им. И. В. Курчатова, президент АН СССР) и Борис Александрович Гаев (впоследствии доктор технических наук, заместитель директора ЛФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, умер в 1974 году). А. П. Александров организовал в своей лаборатории специальную группу, возглавляемую Б. А. Гаевым, которая занималась проблемой размагничивания кораблей.

Идея, положенная в основу работ по защите кораблей от неконтактных магнитных мин, состояла в размагничивании корабля. Предполагалось, что это можно сделать путем компенсации магнитного поля корабля с помощью закрепленных на



Принцип обмоточного размагничивания кораблей: *1* — кабель размагничивающего устройства; *2* — магнитное поле корабля; *3* — магнитное поле обмотки с током; *4* — результирующее магнитное поле корабля; *5* — допустимый предел результирующего магнитного поля, не оказывающий влияния на магнитный взрыватель мины.

нем специальных обмоток, через которые пропускался постоянный ток (см. рисунок). При этом магнитное поле корабля может быть скомпенсировано магнитным полем тока в такой степени, что прохождение корабля над миной не будет вызывать срабатывания взрывателя, имеющего ограниченную чувствительность.

Простая идея, предложенная А. П. Александровым, Б. А. Гаевым и инженером ленинградского Балтийского завода А. А. Картиковским, не сразу получила поддержку со стороны специалистов. Многие из минеров считали, что если уж размагничивать корабль, то нужно полностью скомпенсировать его магнитное поле до нуля. А так как это невозможно из-за весьма сложной конфигурации поля, размагничивание становится бессмысленным, и нужно сосредоточить все силы на создании и совершенствовании методов траления. Некоторые специалисты считали даже, что корабль нужно не размагничивать, а намагничивать еще сильнее, с тем чтобы увеличенное магнитное поле вызывало взрыв магнитной мины на большом расстоянии от корабля. Кстати, как стало известно после войны, англичане, начавшие работать по противоминной защите кораблей также в 1936 году, пошли именно по этому неправильному пути (ведь противник может выставлять как чувствительные, так и загрубленные мины). В результате к началу войны их корабли не были защищены от немецких магнитных мин и торпед, и английский флот понес весьма ощутимые потери. Уже в ходе войны англичанам пришлось разрабатывать размагничивающие устройства и срочно оснащать ими свои корабли.

Группе А. П. Александрова надо было прежде всего самой убедиться в осуществимости идеи размагничивания. Сначала исследования проводились на лабораторной модели корабля, сделанной из дерева и обитой листовым железом. В результате этих опытов были найдены наиболее оптимальные виды размагничивающих обмоток. Решено было переходить к опытам на плавающих кораблях.

Президент Академии наук СССР академик А. П. Александров.

Первые измерения магнитных полей кораблей и опыты по их компенсации были проведены сотрудниками ЛФТИ в 1937 году в сухом доке Кронштадта на эсминцах «Яков Свердлов» и «Артем», а затем на лидере «Ленинград». Итоги были весьма благоприятными. В мае 1938 года в Ораниенбаумском порту на корабль «Дозорный» была наложена временная размагничивающая обмотка и путем измерения поля под кораблем был подобран оптимальный ток в ней. Затем корабль сделал большое количество проходов с выключенной и включенной обмоткой над установленными на разных глубинах разоруженными неконтактными магнитными минами. Было зафиксировано, что мины уверенно срабатывают при прохождении над ними корабля с выключенной обмоткой и совершенно не реагируют при включении в обмотку оптимального тока.

Таким образом, задача противоминной защиты малого корабля была успешно решена. Надо было переходить к опытам по размагничиванию крупных кораблей. В октябре 1938 года был выделен для экспериментов линкор «Марат». И на этом крупнейшем корабле нашего ВМФ при помощи временной размагничивающей обмотки удалось в десятки раз уменьшить магнитное поле в непосредственной близости от киля.

Чтобы получить все необходимые данные о поле корабля для проектирования системы защиты, надо было измерить значения магнитной индукции этого поля в большом числе точек на разных глубинах. Для этого под корабль опускалась алюминиевая штанга с прикрепленным к ней на специальной тележке магнитометром *). Штангу перемещали под кораблем и устанавливали на разных глубинах. Для каждого положения штанги измеряли магнитную индукцию в нескольких точках под килем и за бортами корабля. Эту трудоемкую работу, требующую хорошей отладки приборов и приспособлений, группа ЛФТИ научилась выполнять быстро, чтобы не задерживать боевые корабли на рейде.

Таким образом, к началу Великой Отечественной войны были созданы надежные методы защиты наших кораблей от магнитных мин противника.

Первое военное утро застало группу А. П. Александрова на борту линкора «Марат». Уже в 4 часа утра на нем была объявлена боевая тревога: с финского берега появились вражеские самолеты. Проверив соответствие расчетных ампер-витков в секциях обмоток и убедившись в правильности направления токов в них, комиссия передала в эксплуатацию защитное устройство линкора, сошла на берег в Кронштадте и тут же получила задание командования в срочном порядке оборудовать противоминными системами защиты несколько тральщиков. Не ограничиваясь этим, группа А. П. Александрова из имеющегося в наличии кабеля смонтировала два электромагнитных трала, и уже 27 июня 1941 го-

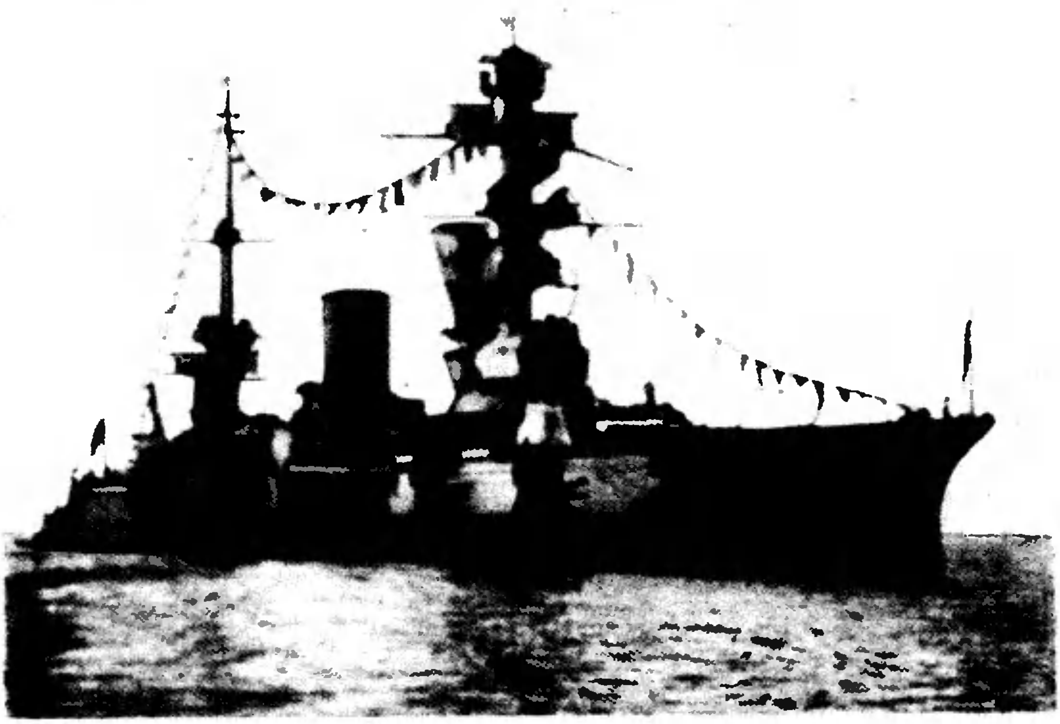
*) Магнитометр — прибор, предназначенный для измерения магнитной индукции поля.

да эти тральщики вышли на выполнение боевого задания.

Прогнозы специалистов ЛФТИ и флота оправдались: самым первым мероприятием немецко-фашистского командования на морских театрах военных действий после вероломного нападения на Советский Союз была попытка заблокировать наши корабли в их базах и связать их боевые действия массовыми постановками магнитных мин. Фашисты возлагали большие надежды на эффективность этого нового морского оружия и были уверены, что советские моряки и специалисты не смогут быстро найти способы и средства защиты кораблей.

Именно в этих тяжелейших условиях начала войны и стал сказываться тот огромный труд, который был проделан в предвоенные годы учеными, военными моряками и специалистами судостроения. В первые же дни на ряде кораблей Балтийского флота были проложены и закреплены на палубе вдоль бортов вре-

Группа научных работников ЛФТИ, занимавшихся размагничиванием кораблей. Слева направо А. Р. Регель, Ю. С. Лазуркин, И. В. Курчатов. Фотография сделана в Поти в декабре 1941 года.



Линкор «Марат» — первый из крупнейших кораблей Военно-Морского Флота СССР, оборудованный размагничивающей системой.

менные размагничивающие обмотки (вплоть до монтажа более основательных устройств). Данные о магнитных полях кораблей разных классов, полученные до начала войны, позволили рассчитывать параметры таких временных обмоток. Военные моряки быстро освоили изготовление «времянок». Так, 28 июня 1941 года подобная «времянка» была за одну ночь наложена на крейсер «Киров», и он был благополучно выведен из Рижского залива через минное поле у острова Даго (теперь — Сарема), где только что перед этим подорвался еще не размагниченный крейсер «Максим Горький». Эффективность таких «времянок» стала очевидной, и моряки всегда радушно принимали у себя ученых. В ходу у них появилось шутливое присловие: «Перед тем как в бой идти, побывайте у ЛеФТИ».

27 июня 1941 года был издан приказ об организации бригад по установке размагничивающих устройств на всех кораблях флота. От ЛФТИ, помимо группы А. П. Александрова, в работу включились многие сотрудники из разных лабораторий. Игорь Васильевич Курчатов, оторвавшись на время от важнейших работ по ядерной физике, предложил А. П. Александрову включить себя и сотрудников своей лаборатории в работы по размагничиванию. Владимир Максимович Тучкевич (ныне академик, директор ЛФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР) также занялся этой проблемой.

С 27 июня 1941 года в Кронштадте начала работать Балтийская группа размагничивания, с 1 июля в Севастополе — Черноморская, с 9 июля в Архангельске — Северная, с 14 августа во Владивостоке — Тихоокеанская.

Сразу же по прибытии на места началась напряженная работа по монтажу размагничивающих устройств на кораблях. Она велась почти повсеместно круглосуточно, в труднейших условиях первого периода войны, при нехватке специалистов, кабеля, оборудования, зачастую под бомбежками и обстрелами, по жестко ограниченному графику. Тем не менее, самоотверженно преодолевая трудности, научные работники, военные моряки, судостроители и монтажники начали один за другим передавать специальным комиссиям штабов флотов корабли со смонтированными и отрегулированными размагничивающими устройствами. Уже в августе основное боевое ядро кораблей на всех действующих флотах и флотилиях было защищено от магнитных мин противника.

Боевая практика показала высокую эффективность разработанных методов размагничивания. Совместная деятельность специалистов по размагничиванию кораблей и по тралению магнитных мин в первый же месяц после начала войны свела практически к нулю потери наших кораблей от этих мин и полностью сорвала попытки закупорить наши корабли в базах и нарушить их боевую службу. Ни один корабль, снабженный защитной системой, не подорвался на магнитных минах.

Небольшая в довоенные годы группа специалистов, зародившаяся впервые в ЛФТИ АН СССР, послужила основой для создания в годы войны большой и хорошо организованной службы размагничивания кораблей. В нее вошли сотни военных моряков, вместе с ними работало большое число научных работников и судостроителей. Благодаря их работе были сохранены для Родины сотни кораблей и многие тысячи человеческих жизней.

И. Пирогов, И. Тюлина

Мехмат МГУ в годы Великой Отечественной войны

«...Золотом по мрамору высечены столбцы фамилий. Рядом с двумя — золотые звездочки. Герои Советского Союза. Всего же на мехмате их семь. Шесть из них — студентки. Не знаю, есть ли в каком-нибудь университете второй такой героический факультет». Так писала газета «Известия» 9 июня 1979 года. Об этом героическом факультете — механико-математическом факультете Московского государственного университета, его жизни в годы Великой Отечественной войны, о некоторых его преподавателях и студентах — участниках войны — рассказывают воспитанники факультета, бывшие фронтовики, ныне доценты МГУ И. А. Тюлина и И. З. Пирогов.

Фронтовики

21 июня 1941 года Женя Руднева записала в дневнике: «Сданы все зачеты! Все экзамены! Все! Все! Жизнь прекрасна и удивительна!»

А на следующее утро на весь наш народ обрушилась грозная весть — война. Мехмат, университет, вся страна закипели, как развороченный муравейник: одни спешили в военкоматы, другие уезжали на трудфронт и на оборонительные работы; бесчисленные эшелоны и колонны потянулись на запад.

В этой обстановке сотни комсомольцев, коммунистов, беспартийных мехматян надели шинели и взялись за винтовку. Учеба была короткой, многие сразу же попали в бой.

Именно так произошло с бойцами славной 8-й Краснопресненской ополченческой дивизии, куда попало 213 студентов, аспирантов и сотрудников мехмата, то есть каждый пятый ополченец Московского университета. Уже известный ученый доцент Николай Борисович Веденисов, с серьезным хроническим заболеванием позвоночника, записался в ополчение потому, что там были его ученики. Он погиб под Вязьмой. Сложившиеся специалисты, выпускники мехмата Михаил Иванов, Евгений Павлов, Мстислав Долгов, Олег Сорокин, Георгий Алексеев имели броню там, куда они были распределены весной 1941 г., но отказались от нее и погибли, защищая столицу на ее дальних подступах. Талантливые молодые ученые аспиранты Андрей Павлов, Иван Лепехин, Степан Карнов, Сергей Кудашев погибли осенью 41-го под Вязьмой, Ярцевым и Духовщиной. Враг не был допущен к Москве.

За время, выигранное в первые тяжелейшие месяцы войны, многие мехматяне, как и все некадровые военные специалисты, прошли переподготовку. Комсомолки, студентки мехмата, оказались хорошо восприимчивыми к штурманскому делу, которому их обучала заслуженный штурман страны Герой Советского Союза Марина Раскова. Более десяти комсомолок МГУ добровольно записались на штурманские курсы. О тех, кто овладел мастерством бомбовых ударов, теперь написано много книг, имена их известны всей стране, их носят траулеры, улицы городов, дворцы пионеров, отряды следопытов. Пять летчиц, комсомолок мехмата, были удостоены высокого звания Героя Советского Союза: Евгения Руднева (посмертно), Евдокия Пасько, Екатерина Рябова, Антонина Зубкова, Руфина Гашева.

О славных делах военных летчиц и штурманов, в том числе и о комсомолках с мехмата МГУ, написано много интересных книг (например, «Боевые подруги мои» и «Повесть о Евгении Рудневой» М. П. Чечневой *)). Недавно боевые подруги отметили 60-летний юбилей Евдокии Борисовны Пасько. Учась на 3 курсе, она с другими комсомолками прошла обучение штурманскому делу в г. Энгельсе. Весной 1942 г. на Северном Кавказе Е. Пасько начала боевые вылеты. К августу 1944 г. она довела их число до 780, налетав 1040 часов и сбросив на позиции противника 93 тонны бомб. Штурман эскадрильи авиаполка ночных бомбардировщиков, она совершала 7—9 вылетов за ночь. После войны Е. Пасько окончила мехмат МГУ, читает разнообразные курсы высшей математики студентам МВТУ, где работает около тридцати лет.

Только через 20 лет после войны узнали о славных делах комсомольцев винницкого подполья, где отличилась комсомолка мехмата, студентка второго курса Лариса Ратушная — «девушка в гимнастерке», какой знал ее весь факультет. Лариса словно смотрела сквозь годы — еще в университете она стала пулеметчицей; до снега, удивляя всех, ходила в носках и резиновых тапочках — закалялась. Во время войны, после двух побегов из плена, Ратушная пробралась домой на Украину, где два года вела подпольную работу. О подвигах Ларисы и ее боевых друзей написана книга Д. Н. Медведева «На берегах Южного Буга». Посмертно Лариса Ратушная удостоена звания Героя Советского Союза.

Геннадий Барыков собирался поступить на мехмат МГУ, но война помешала этому. Он прошел с пехотой тысячи километров, истребляя фашистские танки огнем своей пушки. В красноармейской газете «Патриот Родины» от 16 июля 1945 г. опубликован Указ Президиума Верховного Совета СССР о присвоении звания Героя Советского Союза Геннадию Ивановичу Барыкову. Здесь

*) О Жене Рудневой см. также «Квант», 1977, № 11, с. 38.

Комсомолки мехмата летчицы эскадрильи авиаполка ночных бомбардировщиков Герои Советского Союза (слева направо) Е. Руднева, Е. Пасько, Е. Рябова, А. Зубкова, Р. Гашева.

же рассказывается о многочисленных подвигах Барыкова. Так, в одном бою уже на немецкой земле Барыков остался один со своей пушкой, когда из леса показались на большой скорости 9 немецких танков. Геннадий бесстрашно вступил в поединок с танками. Вскоре метким огнем он поджег головной танк, другие пытались маневрировать в чаще. Но огонь артиллериста вынудил их повернуть назад. После войны Барыков успешно окончил мехмат, защитил кандидатскую диссертацию и работает в одном из вузов Москвы.

Давид Шклярский, один из организаторов школьных математических кружков и математических олимпиад в университете, по окончании мехмата МГУ вступил в действующую армию и погиб в составе моторизованной бригады особого назначения в тылу врага. Через два десятилетия, когда его друзья и ученики затеяли выпуск серии книг «Библиотека математического кружка», в списке авторов первым был поставлен Шклярский. Не по алфавиту — по долгу памяти.

Второкурсник Юра Тихомиров участвовал в Сталинградской битве. Командир роты Тихомиров под ураганным огнем поднимал в атаку бойцов, вел их на дзоты противника. В письме домой в 1944 г. он писал: «Попробовал я и пули, и осколков, вытаскивали меня из заваленного блиндажа, а я — цел и невредим...». Так он писал за полгода до победы, когда за плечами остались и форсирование Сожа и Днепра, и взятие Барановичей. На гимнастерке алело много наград. Бои шли за Варшаву. И здесь, на польской земле, под городом Пултуском, в деревне Старые Барсуки Юра Тихомиров был сражен снарядом, когда он шел в наступление впереди своей роты. Боевые товарищи писали о нем: «Несмотря на

Герой Советского Союза, партизанка Л. Ратушная.

Штурман эскадрильи 46 Гвардейского ночного легкобомбардировочного женского авиаполка, Герой Советского Союза Екатерина Рябова перед боевым вылетом.

то, что он не был богатырского сложения, своими действиями он не раз обеспечивал успех нашей части. Он был лучшим офицером полка».

Его товарищ по второму курсу мехмата Вася Жиров был пулеметчиком в пехоте. Но погиб он не за пулеметом. В жарких боях ранней весной 1942 г. под Ржевом прорвались немецкие танки. Вася Жиров бросился под вражеский танк со связкой гранат и погиб смертью героя.

В тылу врага сражались и погибли комсомольцы мехмата, которых отобрали в первые дни войны как самых надежных и выносливых: два Василия — Подольский и Власенко, Володя Игнатович и Ваня Архименко. Они были десантниками. Младший политрук моторизованного десантного батальона аспирант Казимир Агаев (комсомолец с 1929 г.) был высажен с десантом под Курском зимой 1942 г.; в феврале того же года Казимир Агаев пал смертью храбрых в упорном неравном бою в тылу противника.

Многие довоенные мехматяне запомнили Пашу Лунева. В 1933 г. он пришел на мехмат с восьмилетним рабочим и годовым партийным стажем (он был принят в партию на автозаводе им. Сталина, где работал шофером). На мехмате он учился хорошо и с большим интересом. Был оставлен в аспирантуре. Он был комсоргом, потом секретарем бюро ВЛКСМ мехмата, а перед войной — секретарем комитета ВЛКСМ МГУ. Получив еще до университета специальность танкиста, в начале войны Паша Лунев вступил добровольцем в армию и вскоре погиб под Белой Церковью.

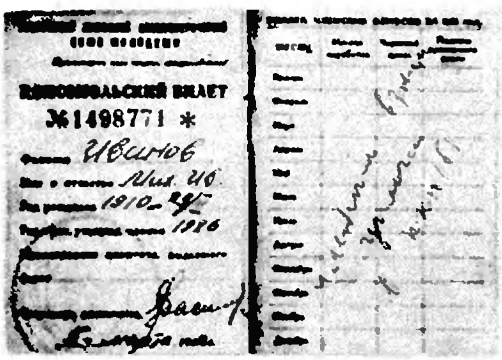
Всего с механико-математического факультета МГУ ушло в действующую армию более 300 человек, половина не вернулась. Комсомольцы факультета ведут поиск следов и воинских биографий погибших товарищей. На мемориальной доске 14 этажа высотного здания на Ленинских горах занесено 80 имен, но это еще не все.

Более пятидесяти человек вернулось на мехмат с различных фронтов Отечественной войны. В настоящее время на факультете работает 33 участника Великой Отечественной войны; из них 15 профессоров, докторов наук (примерно столько же ветеранов работает в НИИ механики МГУ).

Известный ученый-упругист П. М. Огибалов (декан механико-

Капитан Петр Матвеевич Огибалов, штурман и политработник воздушной армии, Народный герой Югославии, ныне профессор мехмата МГУ, бывший декан факультета.

Давид Шклярский, один из организаторов школьных математических олимпиад и математических кружков в МГУ.



КОМСОМОЛЬСКИЙ БИЛЕТ
№1498771
Иванов

33098

математического факультета МГУ в 1969—1977 гг.), будучи в 1941 г. работником ректората и секретариата парткома МГУ, преодолел запреты медкомиссий (из-за плохого зрения), вступил добровольцем в первую воздушную армию, в рядах которой штурманом и политработником прошел всю войну. Закончил он войну в грандиозной освободительной операции в Югославии и Венгрии, на южном фланге советско-германского фронта. Петр Матвеевич Огибалов, заслуженный деятель науки РСФСР, удостоен 15 правительственных наград и почетного звания Народного Героя Югославии.

Учеба в военные годы

Первый военный учебный год начался 1 августа 1941 г. по переходным учебным планам, значительно сокращавшим срок обучения. Но вскоре студенты были мобилизованы на спецработы по обороне Москвы и лишь часть из них вернулась к 1 сентября в аудитории. Занятия проходили в чрезвычайно сложных условиях. В середине октября в связи с эвакуацией университета в Ашхабад занятия были прерваны.

С первых месяцев войны студенты и преподаватели были привлечены в МПВО для охраны зданий университета на Моховой. В одном из подразделений из профессорско-преподавательского состава рядовыми бойцами были И. Г. Петровский, П. С. Александров, С. Л. Соболев, Б. В. Булгаков, А. А. Ильюшин, А. Г. Курош.

29 октября 1941 г. фашистский бомбардировщик прорвался к Манежу и сбросил 200-килограммовую фугасную бомбу перед зданием мехмата (здание Московского университета было включено гитлеровским командованием в число прицельных объектов бомбардировки). Взрывом бомбы была разрушена аэродинамическая труба, повреждены другие лабораторные установки, сильно повреждены памятник Ломоносову и

Старший лейтенант стрелковых войск, участник битвы под Сталинградом (где был тяжело ранен) Виктор Васильевич Москвитин, ныне профессор мехмата МГУ.

Капитан артиллерии Артур Яковлевич Сагомонян, ныне профессор мехмата МГУ.

Комсомольский билет Михаила Иванова, погибшего в 1941 г.

◀ **Студенческий билет Андрея Павлова, погибшего в 1941 г.**

старинная чугунная ограда. Помещения факультета надолго оказались непригодными к занятиям. Но зимняя экзаменационная сессия, а затем и весенняя состоялись: студенты сдавали зачеты и экзамены, в том числе и госэкзамены, получали дипломы.

Основная часть факультета, эвакуированная в Ашхабад, приступила к занятиям в декабре 1941 г.

Перезимовав в Ашхабаде, факультет летом 1942 г. переехал в Свердловск, где условия для занятий были лучше. А весной 1943 г. радостная весть облетела студентов: Московский университет возвращается в Москву! Летом факультет восстановился в Москве, но трудности в жизни факультета еще прибавились. Коллектив факультета значительно увеличился (на 1 курс было принято 155 студентов), а заниматься было негде, читальные залы не работали. В это время нередко можно было встретить нашего студента с учебником, а чаще с конспектом в метро, курсирующего по нескольку раз в день «от Сокольников до Парка» и обратно, в трамвае — от Дома Союзов до общежития в Останкино, а в весеннюю экзаменационную сессию — в Александровском парке, у Кремля — напротив мехмата.

К осени 1944 г. аудитории факультета были полностью восстановлены. По инициативе студентов была проведена научная студенческая конференция по математике и механике, а весной 1945 г. состоялась первая научная конференция «Ломоносовские чтения». Ломоносовская премия была присуждена проф. Х. А. Рахматулину, сделавшему доклад на тему: «Распространение нелинейных волн при ударе по гибкой нити».

Ученые факультета — фронту

Сорок лет назад, еще до начала войны, на аэродроме у станции Планерная под Москвой проходили испытания первых в мире ракет с воздушно-реактивными двигателями. Это было одно из существенных достижений на пути реализации смелых идей К. Э. Циолковского, по замыслу которого еще в 1933 г. в Москве был основан Реактивный научно-исследовательский институт (РНИИ). В Московском университете проводились хоздоговорные экспериментальные работы для РНИИ, о которых в журнале «Крылья родины» (№ 5 за 1964 г.) читаем:

«Начальным этапом явились исследования ракет в аэродинамической трубе механико-математического факультета МГУ. Путем нескольких продувок определили коэффициенты лобового сопротивления ракеты, подобрали аэродинамические тормозы, предназначавшиеся для быстрейшей расцепки первой и второй ступеней.

Одновременно с аэродинамическими исследованиями проводились испытания процесса горения в камере ВРД на ротационной установке, устроенной на станции Планерная». В продувке второй ступени ракеты в вертикальной трубе аэродинамической лаборатории МГУ принимали участие под руководством профессора Х. А. Рахматулина студенты мехмата МГУ И. А. Меркулов (конструктор ракеты с ВРД), А. Т. Улубеков и Л. Сабсович.

В начале войны молодыми учеными механико-математического факультета МГУ А. А. Космодемьянским и Л. П. Смирновым были выполнены исследования, имеющие непосредственное отношение к первым образцам пороховых военных ракет, получивших название «катюш». Об этом говорится в книге «Московский университет в Великой Отечественной войне».

Флаттер — это слово наводило ужас на летчиков-испытателей и конструкторов самолетов в предвоенные годы. Но вот в борьбу с этим таинственным явлением, вызывавшим разрушение самолетов в воздухе, вступили математики. После того как профессором нашего факультета М. В. Келдышем была разработана математическая теория флаттера, таинственность этого явления исчезла, а за время войны не было случаев разрушения самолетов из-за флаттера.

С первых дней войны ученые факультета самым активнейшим образом включились в научные исследования по оборонной тематике. Коллектив кафедры теории вероятностей под руководством академика А. Н. Колмогорова проводил большие исследования по разработке теории артиллерийской стрельбы и созданию таблиц стрельбы. В сжатые сроки была решена задача о наивыгоднейшем рассеивании снарядов при стрельбе по площадям. Профессор С. В. Бахвалов, бывший в годы гражданской войны артиллеристом, разработал теорию приборов управления артиллерийским огнем. В организации обороны Москвы от налета вражеской авиации посильную помощь войскам ПВО оказал профессор Н. А. Глаголев, решивший задачу об оптимальном размещении зенитных батарей вокруг Москвы.

Важная для ПВО задача об устойчивости формы аэростата воздушного заграждения, а также о прочности тросов заграждения была решена профессором Х. А. Рахматулиным; им же разрабатывалась теория парашютов и аэродинамика проницаемых тел.

Трудной и актуальной проблемой для нашей авиации была бомбардировка вражеских войск с малых высот при малых скоростях самолетов. В решении этой проблемы приняли участие многие крупные ученые факультета. Академик Н. Е. Кочин дал практическое решение задачи по теории полетов самолетов на низкой высоте, а коллектив кафедры теории вероятностей создал в 1942 г. таблицы бомбометания с малых высот при малых скоростях самолетов.

Всему миру известна «Дорога жизни» по льду Ладожского озера и ее роль в обороне Ленинграда и спасении многих ленинградцев. В создании этой дороги принимал участие профессор кафедры теории упругости М. М. Филоненко-Бородич, решивший задачу о прочности ледового покрытия.

Следует особо остановиться на тех больших теориях и экспериментальных исследованиях по ряду опытно-конструкторских разработок военной техники, особенно артиллерии, которые проводились на кафедре теории упругости под руководством члена-корреспондента АН СССР А. А. Ильюшина с первых дней войны. Несмотря на то, что во время налетов вражеских бомбардировщиков на Москву лаборатории мехмата сильно пострадали, лабораторные работы на кафедре упругости имели перерыв лишь около двух месяцев (в конце 1941 г.).

Главный результат этих работ — теоретическое определение и доказательство допустимости пластических деформаций осколочно-фугасных снарядов при выстреле. Этот результат был проверен стрельбами и привел к созданию новых форм прочности, позволивших уже в 1943 г. коренным образом расширить производство снарядов из вязких сталей без термообработки и из сталистых чугунов. Использование же низколегированных сталей для изготовления снарядов значительно удешевляло и упрощало производство их, что было особенно важно при работе в условиях эвакуации.

При исследовании устойчивости вязко-пластических течений было определено число осколков и их разлет при разрыве снарядов, а на основе этих исследований были даны предложения об оптимальном проектировании снарядов. Впервые в практике исследования были применены методы моделирования проникновения авиабомб в грунт и дан анализ их прочности. Эти методы позволили решать проблемы оборонной техники ускоренными темпами. В начале войны был предложен метод скоростных испытаний на усталось ферросплавов для танковой промышленности. А в 1942 г. дано приближенное определение угла упреждения торпедной стрельбы по скорости изменения пеленга и сделан соответствующий прибор.

Сложную математическую задачу по устойчивости продольно-вращательных движений снарядов и ракет и определению наивыгоднейшей крутизны нарезки стволов решил член-корреспондент АН СССР Н. Г. Четаев. Им же совместно с профессором А. А. Космодемьянским и профессором Н. Д. Моисеевым была решена важная практическая задача об устойчивости самолета при движении по земле (эта задача возникла при частом перебазировании самолетов на новые неблагоустроенные аэродромы). Понятно, какое исключительное значение в годы войны имела служба времени ГАИШ, обеспечившая передачу точных радиосигналов времени для нужд фронта. В ее бесперебойную работу немалый вклад внес профессор Н. Д. Моисеев, руководивший этой службой. Академик А. Ю. Ишлинский, член-корреспондент АН СССР Б. В. Булгаков и профессор Я. Н. Ройтенберг проводили большую теоретическую и практическую работу по совершенствованию и повышению точности морских гироскопических приборов и приборов управления артиллерийским огнем на кораблях Военно-морского флота СССР.

Профессор М. А. Крейнес принимал активное участие в решении задачи о выборе схем регулярных сложных зубчатых передач для механизмов управления танков.

Здесь перечислены далеко не все работы оборонного характера, которые успешно выполняли ученые факультета. Этот труд ученых механико-математического факультета был отмечен многими правительственными наградами и Государственными премиями СССР.

Забытая теорема

(софизм-шутка)

Вот «теорема», забытая авторами учебников геометрии:

Через любые n точек можно провести прямую линию (n — произвольное натуральное число).

Докажем эту теорему методом математической индукции.

При $n=1$ и $n=2$ теорема справедлива (в силу известной аксиомы геометрии). Остается доказать теорему для больших значений n.

Допустим, что теорема справедлива при некотором $n=k$, и покажем, что в этом случае она будет сохранять силу и при $n=k+1$.

Итак, пусть произвольно заданы $k+1$ точек $M_1, M_2, \ldots M_k, M_{k+1}$. В силу предположения индукции, через k точек $M_1, M_2, \ldots, M_k$ проходит некоторая прямая l. В силу того же предположения через k точек $M_2, \ldots, M_k, M_{k+1}$ также проходит некоторая прямая l'. Эти две прямые имеют по крайней мере две общие точки M_2 и M_k. Но две точки определяют единственную прямую. Прямые l и l' должны поэтому совпадать. Следовательно, прямая l, проходящая через точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$, проходит и через точку M_{k+1} — и теорема доказана.

Ю. Гайдук

П. Халмош

Логика от А до Г

Описание механического помощника математика с вольными замечаниями математика-исследователя

Чем является и чем не является логика

Первоначально «логика» означало то же, что «законы мышления». Логики изучали эту науку, надеясь, что смогут найти лучшие способы мышления и более надежные способы избегать ошибок, чем те, которые знали их предки. Они надеялись, что смогут научить этому искусству все человечество. Однако опыт показал, что это были несбыточные мечты. Нормальный, здоровый человек владеет всеми «законами мышления», которые когда-либо были изобретены, и нет ничего такого, чему логики могли бы его научить по части мышления и способов избегать ошибок. Это не означает, что человек знает, как он думает, и это не означает, что он никогда не делает ошибок. То же самое относится и к органам движения, с которыми рождаются все нормальные, здоровые люди. Я не знаю, как я хожу, но я делаю это. Иногда я спотыкаюсь. Законы ходьбы могли бы представлять интерес для физиологов и физиков, а все, что хочу я,— это продолжать ходить.

Предмет математической логики, который является темой этой статьи, не претендует на открытие законов мышления и обучение им. Этот пред-

Перевод с английского Л. Савиной статьи из Mathematics Magazine, т. 50 (1977), № 1, с. 5—11.

мет называется математической логикой по двум причинам. Во-первых, он имеет дело с тем видом деятельности, которым занимаются математики, когда они что-либо доказывают; математическая логика изучает природу доказательств и пытается предсказать в общих чертах все возможные типы утверждений, которые математики когда-либо докажут и которые они никогда не смогут доказать. Во-вторых, он сам является частью математики. Математическая логика изучает свой предмет математическими методами и проводит доказательства точно так же, как это делается в других областях математики (с методами которых она связана). Эта ситуация похожа на завод, производящий машины, которые призваны производить машины. Работник на таком предприятии не отличается от работника на любом другом заводе, производящем машины, за исключением того, что он, возможно, немного лучше понимает, как делать машины вообще (и немного хуже — как работает каждая конкретная машина).

История логики, подобно истории большинства наук, развивалась совсем не по порядку. Если бы я стал рассказывать вам все прямо, как было, вы бы пришли в замешательство. Я собираюсь рассказать вам немного об истории логики «по порядку», то есть в том порядке, в котором она должна была бы развиваться.

Сначала Буль и высказывания

Согласно моей версии, все началось приблизительно 100 лет назад с Джорджа Буля. Буль систематически изучил безобидные маленькие слова, которые мы используем каждый день, чтобы соединять высказывания,— так называемые *высказывательные связки*. В русском языке эти связки:

и, или, не, влечет,
тогда и только тогда.

Для них удобно иметь сокращения. Обычно используются следующие математические символы:

$$\&,\ \vee,\ \neg,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow$$

Таким образом, если P и Q — высказывание, то $P\,\&\,Q$ — тоже высказывания. Если P означает «солнце светит» и Q — «жарко», то $P\,\&\,Q$ означает «солнце светит и жарко».

Затем Пеано и числа

Следующая фигура в нашей пересмотренной истории математической логики — итальянский математик XIX века Пеано, изучавший основы арифметики. В частности, он изучал свойства основных чисел *нуль* и *единица*, основные действия — *сложение* и *умножение* и основное отношение — *равенство*. Соответствующие символы, конечно, известны каждому:

$$0,\ 1,\ +,\ \times,\ =$$

Таким образом, популярное высказывание «дважды два — четыре» может быть записано в несокращенном виде так:

$$(1+1)\times(1+1)=((1+1)+1)+1.$$

Потом Аристотель и кванторы

Сразу же за Пеано следует Аристотель, который жил более 2000 лет назад и которому мы обязаны пер-

вым анализом важнейших слов *все* и *некоторый*. (Между прочим, мы сейчас достигли начала алфавита: буква А в названии «Логика от А до Г» обозначает, конечно, Аристотеля.) Для них используются следующие сокращения: $\forall$ и $\exists$. Чтобы проиллюстрировать использование этих символов, рассмотрим предложение «Кто заколебался, тот пропал»*). На педантичном математическом языке это может быть сказано следующим образом: «Для всех X, если X заколеблется, то X пропал». Используя $К(X)$ и $П(X)$ в качестве сокращений для «X заколеблется» и «X пропал», мы можем написать

$$(\forall X)(К(X) \Rightarrow П(X)).$$

Если мы сомневаемся в этом утверждении, то есть если мы склонны верить, что вполне возможно колебание без последующей гибели, мы можем выразить наш скептицизм в виде

$$(\exists X)(К(X) \,\&\, (\neg П(X))).$$

И, наконец, Фреге и много кванторов

Важной частью аристотелевских сокращений является использование дополнительных символов, подобных вышеприведенному символу X. Такие символы в языке логики играют роль местоимений. Вспомните, что в вышеприведенном примере X заняло место слова «он». Символы, используемые таким образом, называются *индивидуальными переменными*. Следующей исторической фигурой, заслуживающей упоминания, является человек, который первым решился их использовать. Его имя Фреге, и он тоже жил в XIX веке. Сегодня мы ценим его за то, что именно он подчеркнул: одна переменная, то есть одно местоимение, — слишком убогий инструмент для большинства научных и математических целей. Например, если мы хотим выразить очень скромное утверждение, что имеется больше чем два числа, то есть что существуют по крайней мере три различных числа, мы можем сделать это следующим образом:

$$(\exists X)(\exists Y)(\exists Z)$$
$$(\neg(X=Y) \,\&\, \neg(Y=Z) \,\&\, \neg(Z=X)).$$

Совершенно очевидно, что для этой цели нужны по крайней мере три переменные. Чтобы сказать, что имеется больше чем десять чисел, нужно по крайней мере одиннадцать переменных. Чтобы проделать любое нетривиальное количество расчетов, нужен (по крайней мере потенциально) бесконечный запас переменных. Эффективный способ создать такой запас (обычно алфавиты имеют слишком конечное число букв) состоит в том, чтобы использовать одну букву, скажем X, и один дополнительный символ, скажем штрих. И затем использовать в роли переменных символы

$$X,\ X',\ X'',\ X''',\ X'''',\ldots$$

Кроме тех символов, которые я упоминал до сих пор, имеются еще два, которые я уже использовал, и безудержная честность заставляет меня присоединить их к нашему списку. Символы, которые я имею в виду,— левая и правая круглые скобки: они обозначаются, конечно, так:

(

и

)

Сколько символов?

Оказывается, очень большая часть математики, а именно вся арифметика, может быть выражена с помощью символов, которые я перечислил до сих пор. Например, знаменитая теорема Эйлера*): каждое целое положительное число есть сумма четырех квадратов — может быть записана следующим образом:

$$(\forall X)(\exists X')(\exists X'')(\exists X''')(\exists X'''')$$
$$(X=(X'\times X')+((X''\times X'')+$$
$$+((X'''\times X''')+(X''''\times X''''))))).$$

На самом деле, можно навести некоторую экономию: некоторые символы можно легко и естественно

*) Буквальный перевод английского варианта нашей поговорки «Промедление смерти подобно». (*Прим. пер.*)

*) В русской математической литературе ее называют теоремой Лагранжа. (*Прим. ред.*)

определить через другие. Наш список можно без труда уменьшить до дюжины, а именно:

$$\& \quad \neg \quad + \quad \times \quad 0 \quad 1 \quad \exists \quad X \quad ' \quad = \quad (\quad).$$

Чтобы снова получить $\vee$, заметьте, что $P \vee Q$ есть не что иное, как $\neg(\neg P \ \& \ \neg Q)$. Чтобы получить $\Rightarrow$, заметьте, что $P \Rightarrow Q$ есть то же самое, что и $\neg P \vee Q$. Чтобы получить $\forall$, заметьте, что $(\forall X)\ P\ (X)$ есть то же самое, что $\neg(\exists X)(\neg P(X))$. Так, словами, высказывание «Все ненавидят шпинат» означает то же самое, что отрицание того, что есть кто-то, кто его любит. В таких сокращениях есть некоторое техническое преимущество в принципе, но нет смысла связывать себя ими на практике. Всякий раз, когда удобно, я буду использовать $\vee$, $\Rightarrow$, и я даже буду использовать Y, Z, U, V и т. п. в качестве переменных. Чтобы устранить эти отклонения от наших правил, достаточно заменить $\vee$, $\Rightarrow$, $\forall$ и т. п. на их определения, а также заменить Y, Z, U, V и т. п. на X', X'', X''', X'''' и т. д.

Сделаем пару любопытных замечаний. Во-первых, все, что мы делаем для элементарной арифметики, с таким же успехом может быть сделано для в с е х существующих разделов математики. Технический аппарат, то есть символика и правила, управляющие ею, даже не стали бы сложнее: единственная разница состоит в том, что нам пришлось бы думать немного больше. Но ясно, что это нежелательно, поэтому я собираюсь ограничиться элементарной арифметикой. Во-вторых, в числе «двенадцать» нет ничего магического. Дюжина символов достаточна для арифметики и фактически для всей математики (хотя в этом случае мы, возможно, должны были бы найти другую дюжину). Более того, потратив незначительные усилия, можно обойтись и более скупыми средствами. Наилучший возможный результат, на который вы могли надеяться в самых фантастических мечтах, оказывается верным, а именно, что достаточно даже двух символов*). Полное изложение всей математики, записанное, скажем, точками и тире азбуки Морзе, не явилось бы особенно увлекательным чтением, но в принципе вполне возможно.

Механический математик

Давайте, теперь приступим к созданию механического математика, который положит конец всем математикам. Достоинства этой воображаемой машины чисто умозрительные: мы не утверждаем, что создание механического математика принесет какую-либо практическую выгоду. Он никогда не сможет заменить живого математика.

Начнем строить машину. Для этого нам понадобится лента для пишущих машинок, дюжина клавишей (на каждом находится один из дюжины основных символов) и потенциально бесконечно длинный рулон бумаги для печати. Идея машины состоит в том, что после нажатия пусковой кнопки машина должна начать печатать все, что она когда-либо может напечатать. Один из способов запрограммировать это таков: расположим дюжину символов в произвольном порядке (назовем его *алфавитным*) и затем дадим указание машине печатать первые двенадцать символов («букв») алфавита, потом печатать 144 «слова» из двух букв, затем 1728 «слов» из трех букв и т. д. до бесконечности. Машина, сконструированная таким образом, напечатает много чепухи, например

$$= \ = \ = \ (((0+').$$

и много лжи, например

$$(\exists X)((0 \times X) = 1),$$

но она рано или поздно напечатает любое арифметическое утверждение.

Потребуем соблюдения грамматики

Чтобы сделать машину более похожей на живого математика из плоти и крови, мы должны организовать дело так, чтобы на выходе машина никогда не давала сущего вздора, хотя пока мы ей разрешаем врать.

*) На самом деле, достаточно и одного. Подумайте, почему. (*Прим. ред.*)

Это в принципе достаточно легко. Нет смысла перечислять здесь все ограничения, которые должны налагаться на машину, но давайте рассмотрим несколько примеров. Во-первых, научим машину кое-какой грамматике. Давайте, скажем, что *имя* — это любая последовательность символов, состоящая из нулей и единиц с последовательно расположенными между ними знаками + и ×, а также с разделением получаемых результатов (правильно расставленными) круглыми скобками.

Например,

$$0,$$
$$1+1,$$
$$((1+1)\times(1+(1+(1+1))))$$

являются именами в этом смысле. Аналогично можно сказать, что *местоимение* есть то, что можно получить из X последовательным прибавлением штрихов. Таким образом, местоимениями являются

$$X,\ X',\ X'',\ X''',...$$

Продолжая в том же духе, определим *существительное* как последовательность имен и местоимений, соединенных знаками сложения и умножения (с дополнительным использованием круглых скобок) тем же способом, каким первоначально из 0 и 1 были составлены имена. Совсем нетрудно создать машину, которая может распознавать существительное, когда она видит его. Если это будет сделано, мы сможем приказать машине следующее: «Начать печатать существительные (в некотором систематическом порядке). После того как напечатано одно существительное, напечатай знак равенства, а затем печатай другое существительное. Учись распознавать последовательности, которые ты таким образом напечатала (существительное, равенство, существительное), и называй каждую такую последовательность *равенством*». Теперь наша машина может печатать осмысленные равенства и распознавать их как таковые. Отсюда всего один шаг до того, чтобы научить машину печатать (и распознавать) составные формулы (назовем их *фразами*). Идея состоит в том, чтобы сложить вместе несколько равенств при помощи логических операторов *и*, *не* и *некоторый*, введенных с соответствующими ограничениями. Таким образом, машина, которая печатает только фразы, (по крайней мере умозрительно) достижима. Такая машина могла бы еще печатать неполные (например, $X=0$) или ошибочные (например, $1=0$) фразы, но она больше не будет печатать тарабарщину.

Беглое упоминание выражения «неполные фразы» предполагает другой взгляд на то, что мы хотим от механического математика. Неполная фраза в том смысле, в котором я хочу употребить это выражение сейчас, это что-то похожее на выражение «он пропал». Когда слышишь или видишь эти слова, возникает естественное желание спросить «Кто пропал?». Аналогично $X=0$ должно вызвать реакцию «Что такое X?» Фразы с «висящими местоимениями» такими, как «он» в выражении «он пропал», и такими, как «X» в «$X=0$», — это фразы, которые я хочу здесь называть неполными. Фраза, которая не имеет таких «висящих» местоимений, будет называться *предложением*. Следующий шаг в усовершенствовании механического математика — обучить его распознавать предложение, когда он его видит, и ввести в него запрет, позволяющий ему печатать только полные предложения. Теперь, если нажать кнопку, машина начнет печатать осмысленные предложения. Она никогда не преподнесет оператору выражение «$X=0$». Машина может сказать что-нибудь неинтересное (например, $(\exists X)(X=0)$) или ложное (например, $(\forall X)(X=0)$), но во всяком случае она будет все время что-нибудь говорить.

Зададим аксиомы

Теперь машина знает, как разговаривать. Следующий шаг — научить ее доказывать. Ни машина, ни ее живой прототип из плоти и крови не могут доказать что-то из ничего. Живой математик имеет свои аксиомы. В машину должны быть введены определенные предложения, с которых она обязана начинать. Будем называть эти предложения *аксиомами*. Я опять не указываю здесь точно, какие предложения должны быть аксиомами арифметики, но приведу несколько примеров. (Полное определение понятия «аксиома» в элементарной арифметике не очень длинно или сложно. Просто здесь не время и не место вдаваться в обсуждение технических частностей.) Ну, хорошо: машину можно было бы научить, что всякий раз, когда P и Q — предложения, тогда предложение

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

должно печататься красной краской. Идея состоит в том, что каждое такое предложение нужно считать аксиомой. Аналогично, мы можем сказать, что если $P(X)$ и $Q(X)$ — фразы (содержащие «висящее» местоимение X, но никаких других), то предложение

$$(\exists X)(P(X) \vee Q(X)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists X)P(X) \vee (\exists X)Q(X) \qquad (B)$$

должно печататься красным. Последний пример: такое предложение, как

$$(\forall X)(\forall Y)(X+Y=Y+X), \quad (C)$$

может быть аксиомой элементарной арифметики. (Пояснительные примеры: (A) Если погода теплая, то или солнце светит, или погода теплая, или же и то и другое вместе. (B) Если кто-то любит или шпинат или капусту, то или кто-то любит шпинат, или кто-то любит капусту. (C) $2+3=3+2$.

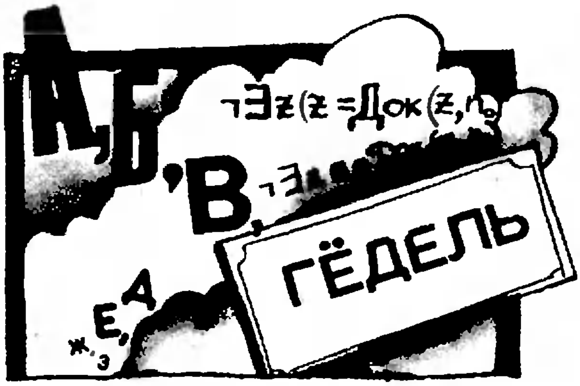
Суть дела здесь состоит в следующем: из всех предложений неким разумным и систематическим способом выбирается определенная группа предложений, которые машина может печатать, и машине дается команда печатать эти специальные предложения красным. Предложения, напечатанные красным, называются аксиомами для машины.

Запрограммируем процедуру

Выше я сказал, что никто не может доказать что-то из ничего, по этой причине я наделю механического математика некоторыми исходными предложениями. Но также верно, что никто не может доказать что-то при помощи ничего. Машина может печатать предложения черным и красным, и если аксиомы были выбраны в соответствии с пожеланиями разумного существа, то предложения, напечатанные красным (аксиомы), будут верны. Тем не менее машина может еще печатать много ложных штуковин, и она все еще не имеет средства для создания новых правильных предложений из старых.

Теперь процесс обучения машины достиг последнего этапа. На этом этапе машина должна научиться распознавать определенные комбинации предложений и за это вознаграждается тем, что ей разрешается использовать больше красной печатной краски. Общий список таких правил процедуры не длинный, список из двух примеров таких правил, который я собираюсь дать, даже еще короче. Возможное правило номер 1: если P — красное предложение и если $P \Rightarrow Q$ — красное предложение, то печатай Q красным. (Объяснение: если «Солнце светит» — аксиома или было уже доказано, так же как и высказывание «Если солнце светит, то погода теплая», тогда мы можем считать доказанным, что «Погода теплая».) Возможное правило номер 2: если неполная фраза $P(X)$, содержащая «висящее» местоимение «X» (и никаких других), такова, что предложение $P(0)$ — красное ($P(0)$ — предложение, полученное из $P(X)$ подстановкой 0 вместо X), то печатай предложение $(\exists X)P(X)$ красным. (Объяснение: если мы подставим 0 вместо X в «$(1+X)=1$», мы получим «$1+0=1$». Если это предложение — аксиома или уже было доказано, то мы можем считать доказанным «$1+X=1$ для некоторого X».)

Сделав последнее добавление, мы можем, наконец, почить на лаврах. Мы можем, если хотим, изменить внутреннюю конструкцию машины так, чтобы она не печатала ничего, кроме красных предложений. Когда нажата кнопка, машина начинает печатать аксиомы и с помощью правил процедуры продолжает печа-



тать теоремы, которые она может вывести из этих аксиом. Машина может делать это в некотором систематическом порядке, скажем в алфавитном.

Наступил золотой век. Механический математик закончен. Нажмите кнопку и, откинувшись на спинку стула, можете бездельничать. На ленте будут появляться одна за другой теоремы элементарной арифметики. Если подождать достаточно долго, то рано или поздно перед вашими глазами пройдут все теоремы. Машина никогда не говорит нелепостей и никогда не говорит неправды. Вы будете считать, что машина несколько скучновата, часто повторяет одно и то же, работает очень медленно с точки зрения человека. Но это не ее вина.

Есть ли противоречия?

Мы ввели в машину все, что мы сами, ее создатели, знаем об элементарной арифметике. Внутренняя работа машины и есть элементарная арифметика. Теория такой машины, ее конструкция, ее структурные свойства являются частью другой дисциплины, часто называемой *метаматематикой* (или, в нашем случае, метаарифметикой). Следующий вопрос является типичным вопросом, задаваемым в метаматематике: «Напечатает ли машина когда-либо как предложение P, так и его отрицание $\neg P$?» Если бы она когда-либо сделала это, то мы бы, вероятно, выразили неудовольствие таким состоянием дел, сказав, что элементарная арифметика противоречива. К счастью, это не так: арифметика не противоречива. Доказательство этого зависит от очень утонченного, неэлементарного изучения той машины, которую мы описали. Изучение является «неэлементарным» в нескольких смыслах этого слова. В самом точном техническом смысле дело в том, что доказательство того, что машина непротиворечива, не является одной из теорем, которую машина сама может доказать. Повторим это иначе: машина никогда не будет противоречить сама себе, но она не может доказать это.

Может ли все быть доказано?

Другим интересным вопросом метаматематики является следующий: «Является ли машина полной в том смысле, что она либо доказывает, либо опровергает каждое предложение элементарной арифметики?» В сущности, я уже дал ответ на этот вопрос, но все-таки стоит его повторить. При создавшемся положении вещей все то, что машина напечатает, она доказывает. Если я заинтересован в каком-то конкретном арифметическом предложении, я могу написать это предложение на кусочке бумаги и затем после включения машины сравнить весь последующий текст, печатающийся машиной, с моим заготовленным бланком. Если на бумаге утверждается P и если на какой-то стадии машина также печатает P, то я удаляюсь с победой: мое утверждение P доказано. Если на бумаге утверждается P, но на какой-то стадии машина печатает $\neg P$, то я удаляюсь с позором: мое P опровергнуто. Однако нет ли здесь третьей возможности? Не может ли так случиться, что машина никогда не напечатает P, а также никогда не напечатает $\neg P$? Не может ли так случиться, что машина никогда не разрешит спора между P и $\neg P$? На самом деле может, и тем самым мы достигли конца нашего алфавита. Г означает «Гёдель» — имя блестящего логика XX века. В начале 30-х годов Гёдель доказал с помощью тонкого и остроумного анализа арифметической машины, что существуют утверждения (и таких много), которые машина никогда не разрешит. Это доказательство явное: оно дает полную инструкцию для записи неразрешимого предложения. Доказательство того, что предложение, которое получили, следуя этой инструкции, неразрешимо, зависит от подробного изучения тех же самых инструкций. Здесь нет ничего неправильного, здесь нет парадокса, здесь все вполне логично. Тот факт, что никто никогда не потрудился записать неразрешимое предложение Гёделя полностью, снова объясняется недостатком терпения и быстротечностью человеческой жизни.

Когда я ставил вопрос о полноте, я сказал, что уже ответил на него. На самом деле, рассмотрим предложение (записанное формально с помощью дюжины формальных символов арифметики), которое утверждает, что арифметика непротиворечива. Совсем не ясно, что скудный формальный аппарат арифметики способен выразить такое предложение. Одной из заслуг Гёделя является то, что он показал способность арифметики проделать это. Если мы примем это на веру и если мы назовем одно такое предложение P, то мы знаем только, что P недоказуемо в элементарной арифметике. А как насчет $\neg P$? Ну, совершенно ясно, что $\neg P$ также не может быть доказано. Причина: все доказываемое, как мы уже знаем из наших предыдущих рассуждений на эту тему, истинно. (Это связано с тем, что арифметика непротиворечива.) Предложение $\neg P$, конечно, не истинно. (Вспомните, что $\neg P$ отрицает непротиворечивость арифметики.) Вывод: ни P, ни $\neg P$ не доказуемо. (Замечание: из этих двух высказываний, истинным является P.)

Но это не все

То, что я сообщил вам, произошло в 30-х годах. Но с тех пор наука не стояла на месте. Сам Гёдель добавил много ярких результатов к нашим знаниям о формальной логике. Многие другие работали в этой области и обнаружили неожиданные приложения и затруднения. Кто, например, мог ожидать, что формальная логика окажется одним из самых важных инструментов при конструировании самых что ни есть настоящих электронных вычислительных машин! Математическая логика жива и здорова, многое еще предстоит сделать, и пройдет много времени до того, когда кто-нибудь сможет описать математическую логику от «А» до «Я».

Дорогой Великой Отечественной войны прошли миллионы советских людей: учителя и инженеры, рабочие и колхозники. Люди самых разных профессий по призыву партии и зову сердца встали на защиту отечества. Мы расскажем вам об участнике Великой Отечественной войны, вся жизнь которого неразрывно связана с преподавательской деятельностью — Алексее Федотовиче Жникине.

В 1931 году молодой рабочий, выходец из крестьянской семьи, поступает на подготовительные курсы при пединституте в Ростове-на-Дону. В 1937 году он оканчивает институт и начинает работать на кафедре математики.

Великая Отечественная война прерывает педагогическую деятельность А. Ф. Жинкина. 15 ноября 1941 года он уходит на фронт, принимает участие в боях на Малой земле. Именно там начальник политотдела армии товарищ Л. И. Брежнев вручает А. Ф. Жинкину партийный билет.

За боевые заслуги А. Ф. Жинкин награжден многими боевыми орденами и медалями.

По окончании войны он продолжает свою преподавательскую деятельность в Винницком пединституте на кафедре методики математики, занимаясь изготовлением наглядных пособий.

Выйдя в 1970 году на пенсию, А. Ф. Жинкин не перестает заниматься педагогической и общественной деятельностью — выступает с лекциями перед молодежью, прививая ей любовь к математике.

М. Барская

Л. Гродко

Устойчивость автомобиля

Качества современного автомобиля в значительной степени определяются уровнем развития теории автомобиля. Одним из важнейших направлений этой теории является учение об устойчивости автомобиля.

Существует несколько различных видов потери устойчивости при движении автомобиля: потеря устойчивости, связанная с боковым или продольным опрокидыванием автомобиля; потеря устойчивости, связанная с достижением упругой шиной колеса ее критической скорости (этому вопросу была посвящена статья в 10 номере «Кванта» за 1978 г.); неустойчивые колебания в горизонтальной плоскости прицепов автомобильного поезда; наконец, неустойчивость одиночного автомобиля, приводящая к так называемым движениям «рысканья» — неуправляемым или плохо управляемым поворотам автомобиля в горизонтальной плоскости. Именно этот вид неустойчивости определяет качество поведения автомобиля в сравнительно «хороших» условиях, то есть при движении по ровной дороге со скоростью, которая наиболее часто встречается в эксплуатации. Именно с этим видом устойчивости связаны понятия: «автомобиль хорошо держит дорогу», «автомобиль приятен в управлении» и т. п.

Создание теории этого вида устойчивости связано с именами советских ученых академика Е. А. Чудакова и профессора Я. М. Певзнера и американского ученого М. Оллея. С помощью специальных экспериментов и теоретических исследований они установили, какие именно свойства автомобиля и его шин определяют его устойчивость.

В этой статье излагаются основные наиболее простые положения этой теории, которые вполне можно пояснить с помощью школьного курса физики.

Увод автомобильной шины

Отчего поворачивает автомобиль? Ответить на этот вопрос, по крайней мере в общих чертах, может каждый, кто хотя бы присматривался к автомобилю. Оттого, что передние рулевые колеса автомобиля могут поворачиваться относительно вертикальных осей. Конструкторы первых автомобилей, предлагая такое устройство, исходили из предположения, что колесо A, будучи повернуто на некоторый угол φ (рисунок 1), «захочет» катиться вдоль прямой AM, представляющей собой проекцию на плоскость дороги плоскости симметрии колеса. И автомобиль будет поворачивать. Если бы это было действительно так, то картина поворота автомобиля выглядела бы следующим образом: корпус автомобиля поворачивается вокруг точки O — центра поворота, лежащей на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей передних и задних колес. При этом, как видно из рисунка 1, если правое переднее колесо A повернуть

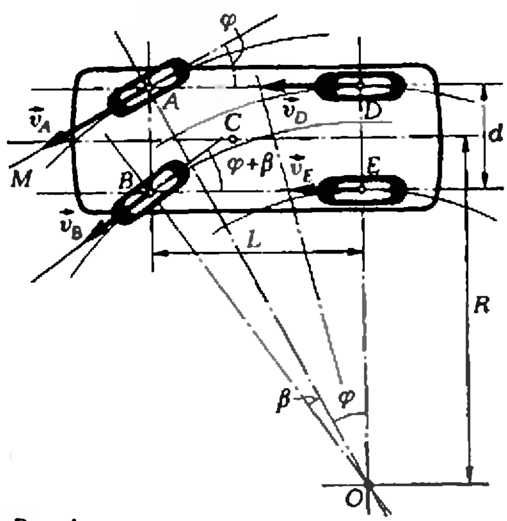


Рис. 1.

на угол φ, то левое нужно повернуть на несколько больший угол $\varphi+\beta$. Расстояние R от оси симметрии корпуса автомобиля до центра поворота можно найти из соотношения

$$R = L\,\mathrm{ctg}\,\varphi - \frac{d}{2},$$

где L — расстояние между осями передних и задних колес — так называемая база автомобиля, d — расстояние между соосными колесами — колея автомобиля.

Однако такая картина поворота возможна лишь при очень медленном повороте, когда центростремительное ускорение центра тяжести автомобиля и вызывающие его боковые силы, приложенные к колесам от земли, невелики.

При наличии боковой силы автомобильная шина «идет» под некоторым углом к своей плоскости симметрии. Это называется явлением увода шины. Для изучения явления увода применяется такой опыт. Испытуемую шину закрепляют на неподвижной оси и прижимают к вращающемуся барабану силой G, соответствующей нагрузке, то есть весу автомобиля, «приходящемуся» на одно колесо (рисунок 2, *а*). Колесо закрепляют так, что его плоскость симметрии (Пл. M) составляет с плоскостью симметрии барабана (Пл. N) некоторый угол δ, называемый углом увода (рисунок 2, *б*).

При вращении барабана на колесо будет действовать сила трения $\vec{F}_{\text{тр}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (рисунок 2, *в*). Слагаемое $\vec{F}_1$ — это сила, «раскручивающая» колесо, а слагаемое $\vec{F}_2$ — это та сила, которая, если ее не «компенсировать», будет смещать колесо «поперек» барабана. Следовательно, чтобы колесо «шло» под углом δ к плоскости N, к нему надо приложить силу $\vec{P} = -\vec{F}_2$.

Измеряя с помощью динамометра величину силы $\vec{P}$ при различных углах увода, можно построить график зависимости $|\vec{P}|(\delta)$. Общий вид такого графика приведен на рисунке 3. При малых углах увода ($\delta < 5°$) зависимость $|\vec{P}|$ от δ оказывается почти линейной, так что напишем

$$|\vec{P}| = k\delta. \qquad (1)$$

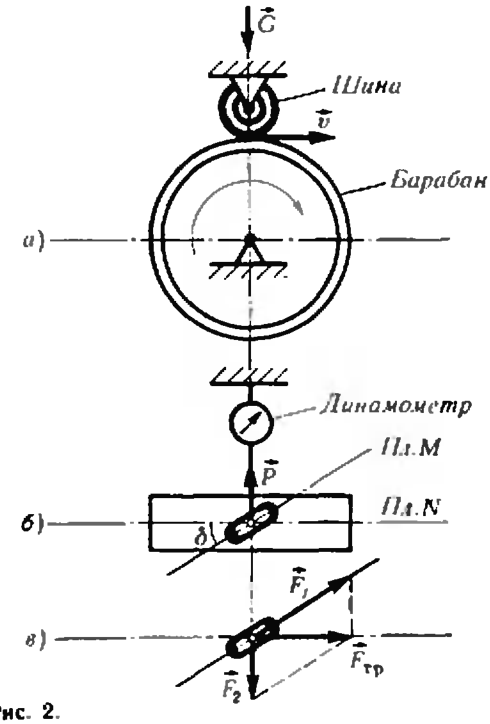


Рис. 2.

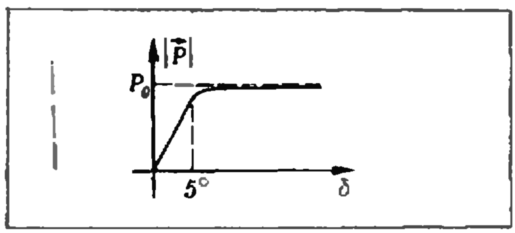


Рис. 3.

Коэффициент k называют сопротивлением боковому уводу данной шины. Значение k зависит от конструкции шины и от величины нагрузки $\vec{G}$. Для современных шин приблизительно выполняется соотношение

$$k \approx 5|\vec{G}|.$$

Например, для автомобиля «Жигули» нагрузка на одно колесо составляет примерно 2200 Н. Следовательно, $k \approx 11\,000$ Н/рад.

При углах увода $\delta > 5°$ боковая сила перестает расти с ростом δ. Участок кривой $|\vec{P}|(\delta)$ при $\delta > 5°$ соответствует качению колеса с полным боковым скольжением. Соответствующая сила трения — так называемая предельная сила трения —

$$|\vec{P}_0| = \mu|\vec{G}|,$$

где μ — обычный коэффициент тре-

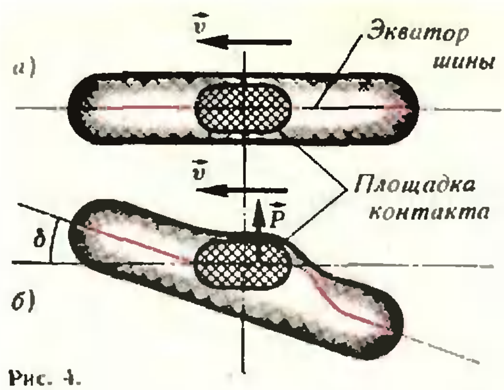


Рис. 4.

ния скольжения, который в теории автомобиля принято называть коэффициентом сцепления шины с дорогой.

Для современной шины на сухом асфальте $\mu = 0{,}6 \div 0{,}8$ (то есть трение шины о дорогу очень велико; например, при скольжении стали по стали $\mu = 0{,}08 \div 0{,}1$).

Оказывается, что при обычной эксплуатации автомобиля углы увода находятся на линейном участке характеристики $|\vec{P}|(\delta)$. Даже на таких «крайних» режимах работы шины, как поворот автомобиля «с писком», угол увода еще несколько меньше «критического» значения $\delta = 5°$. При езде по хорошей ровной дороге значения углов увода все время меняются, так как водитель все время «подправляет» рулем движение автомобиля, но остаются при этом очень малыми ($\delta \approx 0{,}5 \div 1°$).

Линейный участок характеристики увода, описываемый формулой (1), определяется, как показали многочисленные исследования, боковой упругостью шины. Для очень жесткого колеса (например, колесо детского велосипеда или коляски со сплошной резиновой шиной) критический угол увода очень мал — порядка $0{,}5 \div 1°$.

Рисунок 4 сделан с фотографии модели шины в месте ее контакта с дорогой. (Шина «катилась» по барабану со специальной прозрачной поверхностью, через которую изнутри барабана и были сделаны снимки.) На рисунке 4, *а* показано пятно контакта при качении без увода, а на рисунке 4, *б* — с уводом. Для того чтобы картина деформации шины была видна более четко, на шине нарисована средняя линия (экватор на недеформированной шине). Как видно из этих рисунков, средняя линия в зоне контакта направлена по вектору скорости движения шины и величина деформаций тем больше, чем больше угол увода. Отсюда ясно, что при одном и том же угле увода, а следовательно, при одних и тех же деформациях боковая сила тем больше, чем жестче шина.

Выяснение зависимости величины k — сопротивления боковому уводу шины — от конструктивных параметров шины (давления воздуха в шине, ее геометрических размеров, жесткости резины и т. п.) является очень сложной задачей. Кроме того, рассмотренная нами зависимость (1) справедлива лишь в тех случаях, когда угол увода неизменен во времени или меняется сравнительно медленно.

В случаях, когда необходимо рассматривать быстро меняющиеся углы увода, зависимость оказывается более сложной. Такая зависимость изучалась академиком М. В. Келдышем при исследованиях быстрых колебаний колеса с упругой шиной относительно вертикальной оси. Колебания этого типа носят название «шимми» (по названию американского танца). Такие колебания во многих случаях приводили к поломке рулевых управлений автомобилей и самолетных шасси. Теория М. В. Келдыша позволила создать специальные приспособления, устраняющие эти колебания.

Для изучения же устойчивости и управляемости автомобиля в целом зависимость (1) оказывается достаточной.

Движение автомобиля на круговом повороте

Как мы уже говорили, даже при движении автомобиля по прямой и сравнительно ровной дороге водитель немного двигает рулем, так как различные помехи, неровности дороги (пусть даже очень малые), порывы бокового ветра и, наконец, просто невозможность поставить передние рулевые колеса точно в положение «прямо» заставляют немного поворачивать руль время от времени. В течение одного какого-нибудь промежутка времени, пока руль неподвижен, траектория центра тяжести автомобиля близка к дуге окружности очень большого (по сравнению с длиной автомобиля) радиуса. Таким образом, реальная траектория центра тяжести автомобиля, движущегося «прямо», состоит из дуг окружностей большого радиуса и только кажется прямой линией.

Рассмотрим движение автомобиля по окружности радиуса R при неподвижном положении руля и постоянной скорости v. Такое движение называется установившимся поворотом.

Пусть рулевые (передние) колеса автомобиля повернуты под некоторым постоянным углом φ по отношению к положению «прямо» (рисунок 5). Центр тяжести автомобиля (точка C) движется по дуге окружности радиуса R с центростремительным ускорением

$$|\vec{w}_C| = v^2/R.$$

Это центростремительное ускорение сообщается равнодействующей боковых сил, приложенных к колесам автомобиля (на рисунке 5 показаны лишь составляющие $\vec{P}_A$, $\vec{P}_B$, $\vec{P}_D$ и $\vec{P}_L$ этих сил, перпендикулярные оси автомобиля; продольные их составляющие в рассматриваемом случае несущественны). Если радиус поворота R велик по сравнению с длиной автомобиля, то можно принять $\vec{P}_A=\vec{P}_B$ и $\vec{P}_D=\vec{P}_L$. Однако суммарная сила $\vec{P}_1=2\vec{P}_A$, приложенная к передней оси, и суммарная сила $\vec{P}_2=2\vec{P}_D$, приложенная к задней оси, не равны между собой. Их соотношение определяется условием $|\vec{P}_1|a=|\vec{P}_2|b$, где a и b — расстояния от центра тяжести автомобиля соответственно до передней и задней осей. (Поскольку автомобиль не вращается вокруг собственного центра тяжести, моменты сил $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ относительно точки C равны.) Учитывая это и используя второй закон Ньютона — $m\vec{w}_C=\vec{P}_1+\vec{P}_2$, — найдем, что

$$|\vec{P}_1|=m\frac{v^2b}{RL}, \quad |\vec{P}_2|=m\frac{v^2a}{RL}, \quad (2)$$

где m — масса автомобиля, $L=a+b$ — база автомобиля.

Действие боковых сил приводит к уводу шин. Пусть δ_1 и δ_2 — углы увода соответственно передней и задней шин. Векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_D$ скоростей переднего (A) и заднего (D) колес направлены так, как показано на рисунке 5. Перпендикуляры к векторам $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_D$ в точках A и D пересекаются в точке O — в центре дуги-траектории. (Мы считаем, что R очень велико по сравнению с шириной автомобиля, и поэтому пренебрегаем разницей в радиусах окружностей, описываемых точками A, B, C и D, и считаем, что все эти радиусы равны R.) В соответствии с изложенной выше теорией увода

$$|\vec{P}_1|=2k_1\delta_1, \quad |\vec{P}_2|=2k_2\delta_2, \quad (3)$$

где k_1 и k_2 — сопротивления уводу соответственно одной передней и одной задней шин. Сравнивая (2) и (3), находим углы увода шин передней и задней осей:

$$\delta_1=\frac{mv^2b}{RLk_1}, \quad \delta_2=\frac{mv^2a}{RLk_2}. \quad (4)$$

Радиус кривизны траектории характеризуется углом ϑ (см. рисунок 5): $R=L/\vartheta$ (поскольку $L\ll R$). Как видно из рисунка 5,

$$\vartheta=\varphi-\delta_1+\delta_2. \quad (5)$$

Если $\delta_1=\delta_2$, то $\vartheta=\varphi$ — угол поворота руля полностью определяет радиус поворота. Автомобиль, у которого

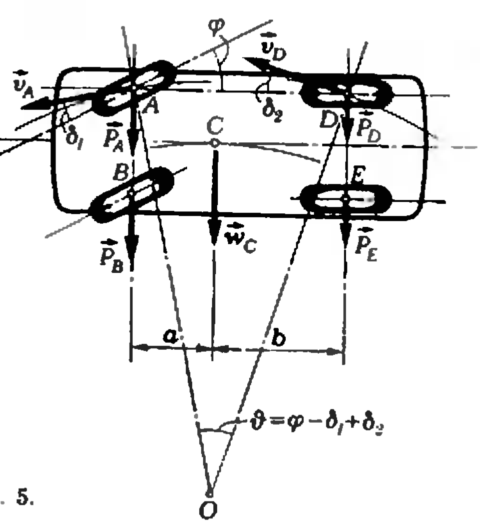


Рис. 5.

выполняется это условие (а это выполняется в соответствии с (4), если $k_1a=k_2b$), называется по терминологии академика Е. А. Чудакова автомобилем с «нейтральной поворачиваемостью».

Если увод задней оси больше чем передней ($\delta_2>\delta_1$ и, соответственно, $k_1a>k_2b$), то очевидно, $\theta>\varphi$ — автомобиль поворачивает «круче». Такой автомобиль называют автомобилем с «избыточной поворачиваемостью».

И наконец, если увод задней оси меньше чем передней ($\delta_2<\delta_1$, то есть $k_1a<k_2b$), то $\theta<\varphi$ — автомобиль имеет «недостаточную поворачиваемость».

Так как углы увода при данном R растут с ростом скорости (см. (4)), то «недостаточность» или «избыточность» поворачиваемости тем сильнее, чем больше v.

Подставляя (4) в (5) (с учетом соотношения $R=L/\theta$), можно получить общую формулу для «результирующего» угла поворота:

$$\theta=\frac{\varphi}{1-\frac{mv^2}{L^2}\left(\frac{k_1a-k_2b}{k_1k_2}\right)}. \qquad (6)$$

Пусть $k_1a>k_2b$ (избыточная поворачиваемость). При данном φ с ростом скорости v знаменатель в выражении (6) уменьшается и θ возрастает. То есть чем больше v, тем «круче» поворачивает автомобиль (при постоянном угле поворота руля φ). Наконец, при некоторой скорости $v=v_{кр}$ величина θ становится бесконечно большой. При такой скорости достаточно бесконечно малого движения руля, чтобы автомобиль «развернулся» вокруг вертикальной оси. Поэтому величину $v_{кр}$ называют критической скоростью потери управляемости для автомобиля с избыточной поворачиваемостью.

Значение $v_{кр}$ найдем из (6), приравняв знаменатель нулю:

$$v_{кр}=L\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1a-k_2b)}}. \qquad (7)$$

Для автомобиля с недостаточной поворачиваемостью критической скорости не существует. В этом случае ($k_1a<k_2b$) знаменатель в формуле (6) всегда положителен и монотонно убывает с ростом скорости v. Таким образом, в этом случае эффективность управления просто уменьшается с ростом скорости.

Для легкового автомобиля с одинаковыми передними и задними колесами и с центром тяжести, расположенным примерно в середине ($a\approx b$), поворачиваемость близка к нейтральной и критическая скорость, если и существует, то достаточно высока. Если, однако, у такого автомобиля «спустит» одна из задних шин, то сопротивление уводу задней оси будет определяться, грубо говоря, лишь одним из двух колес и поэтому уменьшится примерно вдвое. Легко проверить по формуле (7), что при этом критическая скорость может оказаться довольно низкой, порядка 20÷30 км/ч. (В случае $a=b$, $k_2=\frac{1}{2}k_1$ и $k_1=\frac{5}{4}gm$ формула для $v_{кр}$ принимает вид $v_{кр}=\sqrt{\frac{5}{2}gL}$.) Если при этом до спуска задней шины автомобиль имел скорость 60÷70 км/ч, то после неожиданного спуска шины он окажется за критической скоростью. Ситуация при движении с «закритической» скоростью очень интересна. Из формулы (6) видно, что при $v>v_{кр}$ знаменатель отрицателен. Это означает, что наступает «обратимость управления». То есть, если руль повернуть «налево», то автомобиль завернет «направо», и наоборот. Неудивительно поэтому, что резкое падение давления в одной из задних шин приводит во многих случаях к серьезным авариям, так как водитель не может быстро «перестроиться» и теряет управление. При специальных испытаниях, когда водитель подготовлен, он справляется с машиной и может двигаться со скоростью, большей критической. Но когда спуск шины происходит неожиданно, авария почти неизбежна.

Существует мнение, что наиболее опасен разрыв шины переднего колеса. Это, однако, не совсем так. При быстром спуске передней шины резко возрастают усилия на руле. Но если суметь «удержать» руль (для этого требуются не очень большие усилия, дело лишь в неожиданности), то ничего опасного не произойдет.

При спуске же задней шины на большой скорости справиться с машиной очень трудно.

Любопытен еще следующий факт. Из вышеприведенных соображений ясно, что для улучшения устойчивости автомобиля желательно, чтобы центр тяжести был расположен как можно ближе к передней оси (то есть нужно, чтобы выполнялось условие $k_1a<k_2b$; если $k_1\approx k_2$, то чем меньше отношение a/b, тем лучше).

У автомобиля с «задним» расположением двигателя это условие как раз не выполняется. (Двигатель очень тяжелый, и центр тяжести автомобиля «смещается» в сторону двигателя.) Для таких автомобилей компенсируют этот недостаток понижением давления в передних шинах (это снижает k_1).

В свое время для малолитражного автомобиля фирмы «Фиат» с «задним» расположением двигателя было предложено устанавливать давление в передних шинах в три раза меньше, чем в задних. Но даже при таких условиях автомобиль имел критическую скорость 40 км/ч и его эксплуатация была практически невозможна.

На грузовых автомобилях устойчивость заметно ухудшается, когда они сильно нагружены, так как при этом центр тяжести сдвигается назад и увеличивается масса m автомобиля. Это ухудшение устойчивости компенсируется тем, что у большинства грузовых автомобилей задние шины двойные, и это увеличивает вдвое сопротивление уводу задней оси.

У тех же грузовых автомобилей, которые имеют сзади такие же колеса, как и спереди (такие автомобили тоже существуют), дело с устойчивостью при полной загрузке обстоит хуже. У таких автомобилей приходится тщательно следить за давлением в задних шинах. Даже небольшое снижение давления может в этом случае привести к неустойчивости.

Замечательные треугольники

1. Рассмотрим треугольник, похожий на треугольник Паскаля (рис. 1). В нем заданы первые три единицы, а каждое следующее число получается суммированием стоящих выше, образующих вместе с искомым параллелограмм (для чисел, стоящих по боковым сторонам треугольника, параллелограмм вырождается в отрезок).

Обозначим через a_{ij} элемент i-й строки этого треугольника, j-й по счету от начала строки.

а) Докажите формулы:

$a_{n1}=2^{n-2}$, где $n\geqslant 2$;
$a_{n2}=n\cdot 2^{n-3}$, где $n\geqslant 2$;
$a_{n3}=2^{n-5}(n^2+n-4)$,
где $n\geqslant 3$.

б) Выведите рекуррентное соотношение, связывающее элемент a_{nk} с предшествующими, у которых второй индекс меньше k.

в) Выведите формулы для вычисления a_{n4} и a_{n5}.

2. Напишем теперь вместо чисел, образующих треугольник на рисунке 1, их последние цифры. Мы получим числовой треугольник, изображенный на рисунке 2. Докажите, что этот треугольник обладает следующими замечательными свойствами:

1°. Треугольник можно разбить на ромбики 5×5 пяти различных видов (не считая верхнего ромба), у которых в верхнем углу и, соответственно, на нижних сторонах стоит цифры 0, 2, 4, 6 или 8 (см. рис. 2).

2°. Если вместо каждого ромбика поставить цифру, стоящую в его нижнем углу, то получится числовой треугольник, отличающийся от данного лишь первыми тремя строчками.

3°. В каждом ромбике либо все цифры — нули, либо имеется ровно два нуля, расположенных в его самой длинной строчке на втором и четвертом местах.

4°. Цифра, стоящая в центре любого ромбика, равна каждой из двух цифр, расположенных с ней по соседству ниже строчкой.

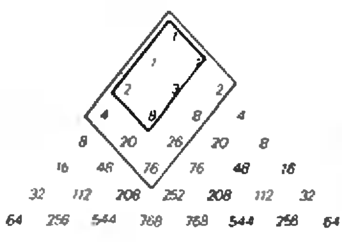


Рис. 1

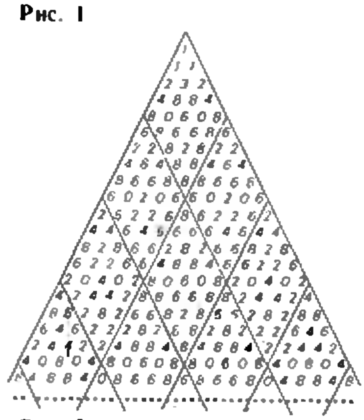


Рис. 2.

М. Штеренберг
(Саратов)

В. Матизен

О пользе скатывания шариков

Бросия в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою...
Козьма Прутков

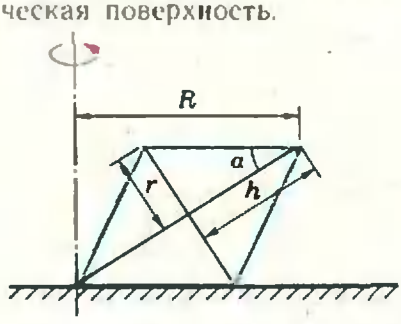
Предлагаем вам проделать такой опыт.

Возьмите комок пластилина и положите его на стол. Накройте комок пластиной и под нажимом раскатайте его. Движения пластины должны быть круговыми с относительно небольшим радиусом. Следите за тем, чтобы все точки пластины описывали окружности равного радиуса на одной и той же высоте над столом.

Попробуйте предсказать, какую форму примет пластилин.

Во-первых, верхняя и нижняя поверхности равноправны: в системе отсчета, связанной с пластиной, стол совершает то же самое вращение. Следовательно, полученное тело должно состоять из двух одинаковых половинок.

Во-вторых, увлекаемый пластиной комок катится вокруг некоторой точки на столе. Естественно предположить, что пластилин примет такую форму, которая позволила бы ему катиться свободно. Этому требованию удовлетворяет, в частности, коническая поверхность.



И действительно, комок пластилина превращается в два конуса, симметричных относительно общего основания.

Обозначим через α половину угла при вершине осевого сечения конусов, через r — радиус основания конусов и через h — их высоту (см. рисунок). Пусть объем комка пластилина равен V, а радиус вращения пластины — R. Найдем связь между указанными величинами. Поскольку

$$h=\frac{R}{2\cos\alpha},\quad r=h\operatorname{tg}\alpha \text{ и } V=\frac{2}{3}\pi r^2 h,$$

получаем

$$\frac{12}{\pi}\frac{V}{R^3}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^5\alpha}.$$

Другими словами, если вы хотите получить конусы с заданным углом α, величины V и R должны быть связаны друг с другом вполне определенным соотношением.

Так, при $\alpha=45°$ $\quad \dfrac{V}{R^3}=\dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

Если исходный комок пластилина имеет форму шара радиусом ϱ, то

$$V=\frac{4}{3}\pi\varrho^3 \text{ и } \frac{\varrho^3}{R^3}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Отсюда $\dfrac{R}{\varrho}=2^{\frac{5}{6}}\approx 2$, то есть $R\approx 2\varrho$ — радиус вращения пластины приблизительно равен диаметру пластилинового шара.

Заметим также, что на опыте нельзя получить правильные конусы с углом α, существенно меньшим 45°. Нетрудно объяснить, почему. Чем меньше угол α, тем больше длина образующей конуса (при неизменном объеме пластилина), а значит, тем на большую поверхность должен распространяться нажим. В таких условиях оказывается практически невозможным сформировать вершинные участки конусов, так как основной нажим приходится на участки вблизи общего основания конусов. Кроме того, малым углам α соответствуют большие значения R, при которых неправильность движения рук может сильно исказить форму получающегося тела.

В. Ольхов

Как придумать геометрическое неравенство

«Придумать новую, оригинальную задачу — сделать небольшое самостоятельное «открытие», пожалуй, даже труднее, чем решить готовую чужую». Эти слова стоят в предисловии к Задачнику «Кванта» в первом номере журнала. Многие ребята спрашивают: а как же все-таки самому придумать задачу?

Расскажу, как я однажды придумал несколько геометрических неравенств.

Я начал с того, что доказал два известных неравенства:

$$a^4+b^4+c^4\geqslant 16S^2, \qquad (1)$$
$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\geqslant 16S^2, \qquad (2)$$

в которых a, b, c — длины сторон треугольника, а S — его площадь. Доказывал я их так.

Написав формулу для площади треугольника

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

и теорему косинусов

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

я нашел синус и косинус

$$\sin\gamma=\frac{2S}{ab}, \qquad (3)$$
$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad (4)$$

и подставил их значения в тригонометрическое тождество $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$. Получилось

$$\frac{4S^2}{a^2b^2}+\frac{a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{4a^2b^2}=1,$$

или

$$16S^2=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-a^4-b^4-c^4.$$

Отсюда, воспользовавшись алгебраическим неравенством (докажите его)

$$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2, \qquad (5)$$

я и получил неравенства (1) и (2).

Подумав немного, я решил попробовать использовать другое тригонометрическое тождество. Вместо $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$ я написал

$$\sqrt{3}\sin\gamma+\cos\gamma=2\sin(\gamma+30^\circ),$$
$$\sqrt{3}\sin\gamma+\cos\gamma\leqslant 2,$$

подставил соотношения (3) и (4) в последнее неравенство и после преобразований получил

$$c^2-a^2-b^2+4ab\geqslant 4\sqrt{3}S. \qquad (6)$$

Заметив, что длины a, b, c входят в (6) «несимметрично», я написал еще два варианта этого неравенства

$$a^2-b^2-c^2+4bc\geqslant 4\sqrt{3}S,$$
$$b^2-a^2-c^2+4ac\geqslant 4\sqrt{3}S.$$

и, сложив их, получил

$$(4ab+ac+bc)-(a^2+b^2+c^2)\geqslant 12\sqrt{3}S. \qquad (7)$$

Глядя на (7), я решил воспользоваться неравенством

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc$$

и получил, как при доказательстве (1) и (2), два красивых (но, к сожалению, довольно хорошо известных!) неравенства

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S,$$
$$ab+bc+ca\geqslant 4\sqrt{3}S.$$

После этого мне уже было ясно, как можно получить еще много геометрических неравенств.

Упражнения

1. Докажите неравенство

$$2ab+2bc-b^2\geqslant 4\sqrt{3}S$$

Выясните, когда оно превращается в равенство.

2. Докажите, что для равностороннего треугольника неравенство (7) превращается в равенство. Верно ли обратное?

3. Применив тригонометрическое неравенство $\sin\gamma+\cos\gamma\leqslant\sqrt{2}$, докажите, что

$$c^2-a^2-b^2+2\sqrt{2}ab\geqslant 4S,$$
$$\sqrt{2}(ab+bc)-b^2\geqslant 4S,$$

и исследуйте, когда они превращаются в равенства

Л. Курляндчик, А. Лисицкий

Как придумать комбинаторное тождество

В различных задачниках, да и в Задачнике «Кванта», часто встречаются тождества, содержащие биномиальные коэффициенты C_k^i. Довольно часто удается их доказать методом математической индукции, иногда различными хитрыми преобразованиями, но эти доказательства, как правило, оставляют чувство неудовлетворенности: из них совершенно не ясно, как же было **придумано** данное тождество, как вообще находить новые тождества.

Здесь мы укажем несколько приемов, позволяющих придумывать подобные тождества. В частности, мы объясним, каким образом мы когда-то придумали задачу М470; об этом спрашивал в письме в «Квант» дагестанский школьник А. Габибов.

Представим себе, что нам нужно найти $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. Попробуем вспомнить, где нам встречалось выражение kx^{k-1}. Конечно же, в формуле $(x^k)'=kx^{k-1}$. Наша догадка «убивает» задачу; действительно,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)'=\sum_{k=1}^{n} (x^k)'=\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

С другой стороны,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)'=\left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)'=$$

$$=\frac{((n+1)x^n-1)(x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{nx-n-1}{(1-x)^2}x^n.$$

(В этой выкладке мы, естественно, предполагали, что $x\neq 1$.) Значит,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{nx-n-1}{(1-x)^2}x^n. \qquad (1)$$

Теперь попытаемся найти $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2}$. «Особенности человеческого характера побуждают повторить процедуру, которая помогла нам ранее в аналогичной ситуации...» (Д. Пойа «Математическое открытие», М., «Наука», 1970, с. 88). Так повторим ее!

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} (kx^{k-1})'=\left(\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}\right)'=$$

$$=\left(\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{nx-n-1}{(1-x)^2}x^n\right)'=\frac{2}{(1-x)^3}+$$

$$+\frac{n(1-x)^2+2(1-x)(nx-n-1)}{(1-x)^4}x^n+$$

$$+\frac{n(nx-n-1)}{(1-x)^2}x^{n-1}. \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2) весьма громоздки. На их основе можно получить (при $|x|<1$) более красивую формулу

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+n}^{n}x^k=\frac{1}{(1-x)^{n+1}},$$

но ее вывод выходит за рамки школьной программы.

Расскажем теперь об одном приеме, который позволяет получать «новые» тождества из «старых». Рассмотрим хорошо известную формулу Ньютона

$$(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i.$$

Продифференцируем это равенство. Получаем

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{i=1}^{n} iC_n^i x^{i-1}. \qquad (3)$$

Положив в равенстве (3) $x=1$ и $x=-1$, найдем

$$\sum_{i=1}^{n} iC_n^i = n\cdot 2^{n-1};\quad \sum_{i=1}^{n}(-1)^i iC_n^i=0.$$

Продифференцируем теперь равенство (3):

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}=\sum_{i=2}^{n} i(i-1)C_n^i x^{i-2}.$$

Положим и здесь $x=1$ и $x=-1$. Получаем еще два тождества

$$\sum_{i=2}^{n} i(i-1)C_n^i=n(n-1)\cdot 2^{n-2},$$

$$\sum_{i=2}^{n}(-1)^i i(i-1)C_n^i=0.$$

При помощи дифференцирования можно получить много новых тождеств: достаточно взять какое-нибудь известное тождество и продифференцировать его.

Многие из вас встречали тождество

$$\sum_{i=1}^{n}\sin ix=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\quad (x\neq 2\pi m). \tag{4}$$

(попробуйте его доказать!).

Продифференцируем (4):

$$\sum_{i=1}^{n} i\cos ix=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Подставляя в эту формулу, например, $x=\pi$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\cdot i=\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

Конечно, это равенство легко доказать по индукции, но дело не в том, как доказать, а дело в том *как его получить!*

Сейчас мы немного усложним метод дифференцирования: будем сначала логарифмировать данное тождество, а затем уже дифференцировать его. Начнем с тождества

$$\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{x}{2^i}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right). \tag{5}$$

Равенство (5) прологарифмируем и полученное тождество продифференцируем. Получается

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\operatorname{tg}\frac{x}{2^i}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x.$$

Это тождество вы, наверное, встречали во многих сборниках задач по математике. Теперь мы знаем, как можно до него догадаться.

Нам осталось выполнить последнее обещание — рассказать, как была придумана задача М470.

Тут кое-что вам придется принять на веру. Имеет место формула

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

Вообще-то она доказывается не очень сложно, но нужно знать формулу интегрирования по частям, которой нет в школьном учебнике. Если этот интеграл вас заинтересует, напишите нам, и мы приведем подробное доказательство.

Пользуясь этой формулой, утверждение задачи **М470** получается таким образом:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{C_n^i}=(n+1)\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i i!(n-i)!}{(n+1)!}=$$

$$=(n+1)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\int_0^1 x^{n-i}(1-x)^i dx=$$

$$=(n+1)\int_0^1 x^n\sum_{i=0}^{n}\left(1-\frac{1}{x}\right)^i dx=$$

$$=(n+1)\left(\int_0^1 x^{n+1}dx-\int_0^1(x-1)^{n+1}dx\right)=$$

$$=\frac{n+1}{n+2}\left(1+(-1)^n\right).$$

В Задачнике «Кванта» под номером **М184** было опубликовано тождество

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^iC_n^i}{ai+1}=\frac{n!a^n}{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}.$$

Оно получается из интегрального тождества

$$\int_0^1(1-x^a)^n dx=\frac{n!a^n}{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}.$$

Действительно, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^iC_n^i}{ai+1}=$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^i\int_0^1 x^{ai}dx=\int_0^1(1-x^a)^n dx.$$

Задачник Кванта

Задачи

М621—М625; Ф633—Ф637

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июля 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5 — 80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М621, М622» или «Ф633». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М621. Вокруг окружности описан n-угольник. Произвольная точка P внутри окружности соединена со всеми его вершинами и точками касания. Образовавшиеся $2n$ треугольников окрашены попеременно в красный и синий цвет. Докажите, что произведение площадей красных треугольников равно произведению площадей синих треугольников.

У. Алла

М622. Докажите, что количество решений уравнения

$$x^3+y^2=z^3+t^2+1$$

в натуральных числах, не превосходящих 10^6, меньше, чем количество решений уравнения

$$x^3+y^2=z^3+t^2$$

в натуральных числах, не превосходящих 10^6.

В. Вавилов

М623. а) Сколько осей симметрии имеет куб? Правильная треугольная пирамида?
б)* Докажите, что если некоторый многогранник имеет k осей симметрии ($k\geqslant 1$), то k нечетно.

В. Сендеров

М624. Найдите последовательность (a_n), определяемую условиями $a_1=1$,

$$1+\sum_{d}(-1)^{n/d}a_d=0, \qquad (*)$$

где сумма Σ берется по всем делителям d числа n (включая $d=1$ и $d=n$).
Например, если $n=p$ — простое число, то $(*)$ принимает вид $1+(-1)^{p/1}a_1+(-1)^{p/p}a_p=0$, откуда $a_p=2$, если $p=2$, и $a_p=0$ — если $p>2$.

В. Абрамович

М625.* На координатной плоскости заданы четыре точки с рациональными координатами, не лежащие в вершинах параллелограмма, причем никакие три из них не принадлежат одной прямой. Разрешается проводить прямую через любые две уже полученные точки и отмечать точку пересечения любых двух проведенных прямых. Докажите, что множество точек, которые можно получить таким образом, — это множество всех точек плоскости с рациональными координатами, если: а) эти четыре точки — вершины трапеции; б) эти четыре точки — вершины произвольного четырехугольника.

Ю. Михеев

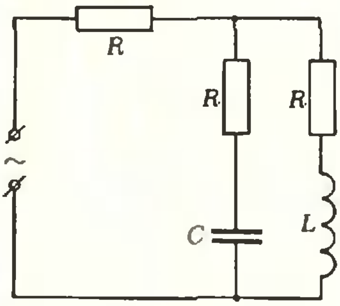


Рис. 1.

Ф633. Три одинаковых резистора, конденсатор емкостью C и катушка индуктивностью L соединены в цепь, как показано на рисунке 1. Частота ω переменного тока в цепи такова, что $\omega L = 1/\omega C$. При каком сопротивлении R резисторов ток в неразветвленной части цепи в n раз меньше тока в каждой из ветвей?

Г. Савкун

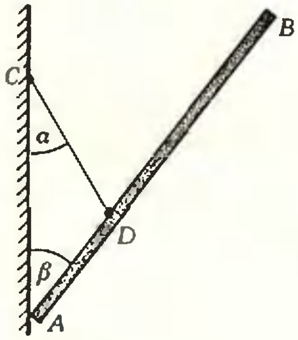


Рис. 2.

Ф634. Стержень AB длиной l и массой m нижним концом опирается на стену и с помощью нити удерживается в наклонном положении (рис. 2). Нить привязана к стене в точке C, а к стержню — в точке D такой, что $|AD| = 1/3|AB|$. Углы, составляемые нитью и стержнем со стеной, равны α и β соответственно. Найти возможные значения коэффициента трения между стержнем и стеной.

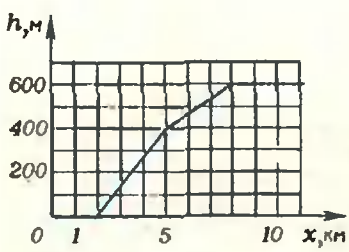


Рис. 3.

Ф635. Два одинаковых автомобиля массой $m = 10^3$ кг движутся вверх по одной и той же горной дороге. Зависимость высоты h дороги от расстояния x до начала подъема показана на рисунке 3. Каждый автомобиль развивает постоянную мощность $P = 12$ кВт, а сила сопротивления движению автомобиля пропорциональна квадрату его скорости: $|\vec{F}| = \alpha|\vec{v}|^2$, где $\alpha = 1{,}4$ кг/м. На последнем горизонтальном участке дороги расстояние между автомобилями равно 100 м. Каким было минимальное расстояние между автомобилями при их движении?

«Среднешкольный математический журнал», Будапешт

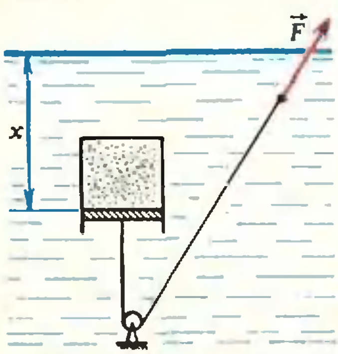


Рис. 4.

Ф636. Цилиндрический сосуд, закрытый невесомым поршнем площадью сечения S, содержит газ под атмосферным давлением p_0. Объем газа при этом равен V_0. Сосуд погружают в воду (плотностью ρ_0) так, как показано на рисунке 4. Найти зависимость расстояния x между поршнем и поверхностью воды от модуля F силы, удерживающей нить, которая привязана к поршню.

«Среднешкольный математический журнал», Будапешт

Ф637. В сверхпроводящих катушках с индуктивностями L_1 и L_2, включенных параллельно, возбужден ток. Индуктивность L_1 одной из катушек уменьшается до нуля. Во сколько раз изменится при этом ток в цепи и энергия системы?

П. Зубков

Решения задач

М566, М567, М569; Ф578, Ф580—Ф582

М566. *Какое наименьшее значение может иметь отношение площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников, три вершины одного из которых лежат, соответственно, на трех сторонах другого?*

Мы приведем два решения этой задачи: в одном из них фиксируется внешний (больший) треугольник и меняется внутренний (меньший) — так поступило большинство наших читателей, правильно решивших эту задачу; в другом — наоборот: фиксируется внутренний треугольник, а меняется внешний.

Первое решение. Пусть длина катета внешнего (фиксированного) треугольника равна a; найдем минимум площади S внутреннего треугольника. Обозначим длину его катета через u.

Рассмотрим два случая:

а) вершина C прямого угла внутреннего треугольника лежит на катете внешнего треугольника (рис. 1);

б) вершина C внутреннего треугольника ($\hat{C}=90^\circ$) лежит на гипотенузе внешнего треугольника (рис. 2).

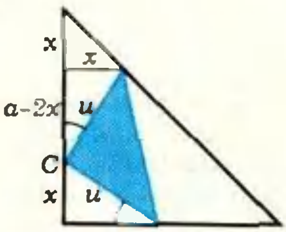


Рис. 1.

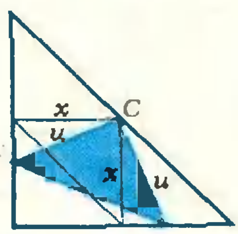


Рис. 2.

Для случая а)

$$S=\frac{1}{2}u^2=\frac{1}{2}\left(x^2+(a-2x)^2\right)=\frac{1}{2}(5x^2-4ax+a^2)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[5\left(x-\frac{2a}{5}\right)^2+\frac{a^2}{5}\right],$$

так что минимальное значение $S_{\min}=\frac{a^2}{10}$ (при $\left(x-\frac{2a}{5}\right)^2=0$), откуда наименьшее значение отношения площадей

$$k=\frac{a^2/10}{a^2/2}=\frac{1}{5}.$$

В случае б) из рисунка 2 видно, что $u\geqslant x=\frac{a}{2}$; поэтому в этом случае $S_{\min}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{8}$, откуда наименьшее отношение площадей равно $\frac{1}{4}$. Так как $\frac{1}{5}<\frac{1}{4}$, искомое наименьшее значение равно $\frac{1}{5}$.

Второе решение. Зафиксируем теперь меньший (внутренний) треугольник и будем менять больший (внешний) треугольник. Обозначим длину катета внутреннего треугольника через a, длину катета внешнего — через x.

Вершины A, C, B внешнего треугольника ($\hat{A}=45^\circ$, $\hat{C}=90^\circ$, $\hat{B}=45^\circ$) лежат на дугах, построенных на катетах и на гипотенузе внутреннего треугольника, вмещающих, соответственно, углы в 45°, 90° и 45°. Снова возможны два случая:

а) вершины A и C внешнего треугольника лежат на дугах, построенных на катетах внутреннего треугольника (рис. 3);

б) вершины A и C внешнего треугольника лежат на дугах, построенных на катете и гипотенузе внутреннего треугольника (рис. 4).

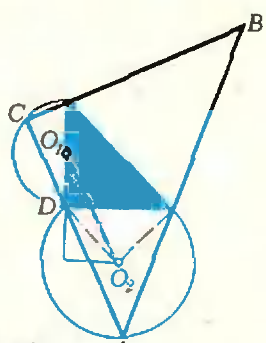


Рис. 3.

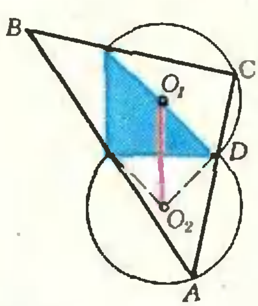


Рис. 4.

Поскольку площадь внешнего треугольника $S=\frac{1}{2}x^2$ и отношение площадей $\frac{a^2}{x^2}$ минимально, когда x — максимально, задача сводится к отысканию наибольшей общей хорды AC двух пересекающихся окружностей, проходящей через точку D их пересечения.

Из рисунка 5 видно, что $|AC|=2|O_1E|<2|O_1O_2|$ (O_1 и O_2 — центры окружностей); следовательно, хорда наибольшей длины, проходящая через точку пересечения окружностей D, параллельна отрезку, соединяющему центры упомянутых окружностей, и вдвое длиннее его.

Для случая а)

$$x_{\max}=2\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=a\sqrt{5},$$

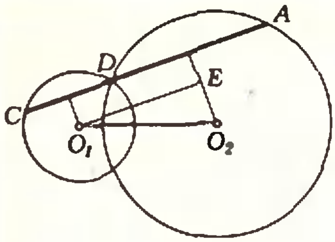


Рис. 5.

так что наименьшее отношение площадей $\frac{a^2}{x^2_{max}} = \frac{1}{5}$.

Для случая б)

$$x_{max} = 2a,$$

так что наименьшее отношение площадей равно $\frac{1}{4}$.

Как и раньше, делаем вывод, что искомое наименьшее отношение площадей равно $\frac{1}{5}$.

Второе решение, конечно, длиннее первого; но оно основано на красивом геометрическом рассуждении, которое можно применять и в других ситуациях. Например, когда рассматриваются произвольные треугольники. В этом вы можете убедиться, решив самостоятельно такую задачу:

В данный треугольник ABC вписать подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$ ($\hat{A}=\hat{A}_1$, $\hat{B}=\hat{B}_1$, $\hat{C}=\hat{C}_1$) так, что $A_1 \in [BC]$, $B_1 \in [CA]$, $C_1 \in [AB]$ и площадь треугольника $A_1B_1C_1$ — наименьшая. Более общая задача уже разбиралась в «Кванте» (М207, решение — «Квант», 1974, № 2).

В. Батырев, А. Сосинский

◆

М567. *Натуральные числа p и q взаимно просты. Отрезок $[0;\ 1]$ разбит на $p+q$ одинаковых отрезков (рис. 1). Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из $p+q-2$ чисел*

$$\frac{1}{p},\ \frac{2}{p},\ \ldots,\ \frac{p-1}{p},$$

$$\frac{1}{q},\ \frac{2}{q},\ \ldots,\ \frac{q-1}{q}.$$

Приведем два решения.

Первое решение. Из условия следует, что каждое из чисел p и q взаимно просто с числом $n=p+q$, поэтому никакие две из точек i/p, j/q, k/n (отличные от 0 и 1) не совпадают. Поскольку $1/p > 1/n$ и $1/q > 1/n$, любые две из точек i/p лежат в разных отрезках $\left[\frac{k}{n};\ \frac{k+1}{n}\right]$ и любые две из точек j/q — тоже. Нужно лишь доказать, что какие-то две точки i/p и j/q не могут попасть в один и тот же отрезок $\left[\frac{k}{n};\ \frac{k+1}{n}\right]$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-2)$. Но это сразу следует из того, что дробь $\frac{k}{n} = \frac{i+j}{p+q}$ лежит между $\frac{i}{p}$ и $\frac{j}{q}$ (см., например, рисунок 2: угловой коэффициент диагонали параллелограмма заключен между угловыми коэффициентами его сторон*).

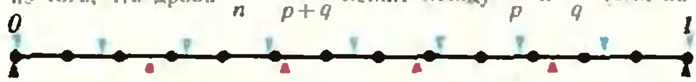


Рис. 1. $p=8$, $q=5$, $n=8+5=13$

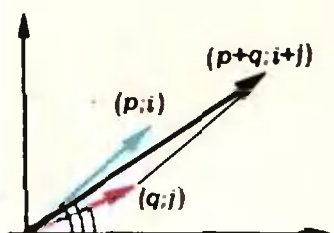


Рис. 2.

Второе решение. Нарисуем на клетчатой бумаге прямоугольник размерами $p \times q$ клеток и проведем в нем диагональ OE (рис. 3) — она и будет играть роль отрезка $[0;\ 1]$ нашей задачи. Линии одного направления (синие) делят ее на p равных частей, другого (красные) — на q равных частей. Проведем через вершины клеток еще ряд параллельных прямых — под углом 45° к линиям сетки (на рисунке это — черные прямые $x+y=k$, где $k=1,\ 2,\ \ldots,\ \ldots,\ p+q-1$). Они делят $[OE]$ на $n=p+q$ одинаковых отрезков. Утверждение задачи теперь становится почти очевидным. В самом деле, на $[OE]$ между любыми двумя сине-красными точками обязательно лежит черная точка: ведь, пересекая какую-то клетку, $[OE]$ обязательно пересекает и ее черную диагональ. (Можно вместо этого сказать и так: между любыми двумя точками пересечения $[OE]$ с соседними черными прямыми лежит точка пересечения с синей или красной линией.)

В этом решении взаимная простота чисел p и q гарантирует, что $[OE]$ не проходит через узлы сетки, отличные от O и E (глядя на наш маленький рисунок, в этом можно усомниться).

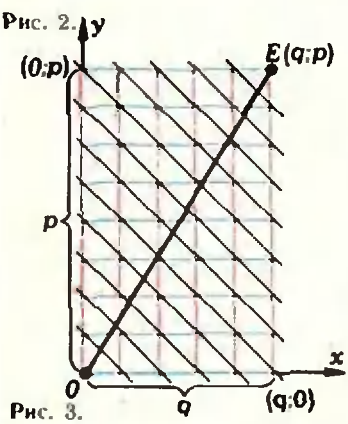


Рис. 3.

---

*) Тот факт, что «медианта» двух дробей i/p и j/q лежит между ними, использовался в статье «Близкие дроби» («Квант», 1975, № 8).

Задача М567 допускает замечательное обобщение. *Пусть α и β — любые положительные числа, связанные соотношением $1/\alpha+1/\beta=1$.*

Отметим на числовой оси всевозможные числа вида $i\alpha$ и $j\beta$ ($i\in\mathbf{Z}$, $j\in\mathbf{Z}$). Тогда каждый отрезок $[k;\ k+1]$ оси ($k\in\mathbf{Z}$), ни в один из концов которого не попало отмеченное число, содержит ровно одно из отмеченных чисел $i\alpha$, $j\beta$. Наша задача эквивалентна этому факту при рациональных α и β: нужно взять $\alpha=n/p$, $\beta=n/q$ (роль отрезка $[0;\ 1]$ будет играть теперь отрезок $[0;\ n]$). Этот же факт (для иррациональных α и β) упоминался недавно в решении задачи М538 («Квант», 1979, № 11), очень похожем на наше второе решение М567.

Н. Васильев

◆

М569. *В тетради написано несколько чисел. К этим числам разрешается приписать число, равное среднему арифметическому двух или нескольких из них, если оно отлично от всех уже написанных чисел. Докажите, что, начав с двух чисел 0 и 1, с помощью описанных операций можно получить*

а) число 1/5;

б) любое рациональное число между 0 и 1.

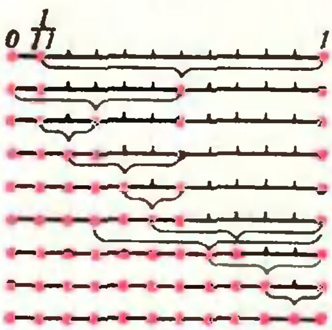
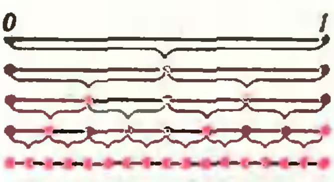


Рис. 1.



$$\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}}{3};$$

$$\frac{1}{5}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{1}{32}}{5}$$

Рис. 2.

Начнем с представления числа $1/5$ и вообще $1/q$. Числа $1/2$, $1/4$, $3/4$ получить очень просто:

$$\frac{1}{2}=\frac{0+1}{2},\quad \frac{1}{4}=\frac{0+\frac{1}{2}}{2},\quad \frac{3}{4}=\frac{\frac{1}{2}+1}{2}.$$

Так же можно, очевидно, получить любую правильную двоично-рациональную дробь, то есть дробь вида $p/2^m$, $p<2^m$ (рис. 1).

Чтобы получить дробь $1/q$, достаточно представить 1 в виде суммы q различных правильных двоично-рациональных дробей: их среднее арифметическое будет равно как раз $1/q$. Докажем по индукции, что это возможно. В виде суммы двух таких дробей 1 представить можно (например, $1=3/4+1/4$). Из представления 1 в виде суммы $n-1$ различных двоично-рациональных дробей можно получить ее представление в виде суммы n таких дробей:

$$1=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=\frac{1}{2}+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2}.$$

В частности, следуя этому построению, получим

$$1=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{1}{32},$$

что дает представление числа $1/5$.

Теперь к доказательству второго утверждения задачи можно идти многими разными путями. Приведем два из них.

1. Докажем, что если натуральное число p можно представить в виде суммы $n-1$ различных правильных двоично-рациональных дробей:

$$p=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}\quad (0<a_{n-1}<\ldots<a_2<a_1<1),$$

то его можно представить и в виде суммы n таких дробей. Пусть 2^m — наибольший из знаменателей слагаемых a_i. Заменив a_{n-1} на сумму $\left(a_{n-1}-\frac{1}{2^{m+2}}\right)+\frac{1}{2^{m+2}}$, получим нужное представление. Итак, если каждая из дробей $\frac{1}{q}$, $\frac{2}{q}$, ..., $\frac{q-1}{q}$ может быть представлена в виде среднего арифметического различных правильных двоично-рациональных дробей, то и дроби $\frac{1}{q+1}$, $\frac{2}{q+1}$, ..., $\frac{q-1}{q+1}$ могут быть представлены в аналогичном виде. Чтобы закончить доказательство по индукции (база индукции — представление числа $1/2$), осталось представить в нужном виде дробь $\frac{q}{q+1}$. Ее можно получить из представления числа $\frac{1}{q+1}$ заменой всех дробей a_i на $1-a_i$.

2. Рассмотрим три уже полученных числа: 0, $1/q$, 1. Одно из двух средних $\frac{0+1}{2}$, $\frac{1/q+1}{2}$ — дробь вида p_0/q, $1<p_0<q$ (если $q>2$). Одно из двух средних $\frac{0+p_0/q}{2}$, $\frac{1/q+p_0/q}{2}$ —

дробь p_1/q, где $1<p_1<p_0$ (если $q>3$). Ясно, что, продолжая этот процесс, мы получим дробь $2/q$. Рассмотрев затем тройку чисел $1/q$, $2/q$, p_0/q, мы таким же спуском получим дробь $3/q$, затем (если $q>4$) $4/q$, ..., $(q-1)/q$ и т. д. (рис. 2).

Заметим, что среднее арифметическое более чем двух чисел нам надо находить лишь один раз.

М. Серов

Ф578. *Концы A и B стержня AB скользят по сторонам прямого угла (рис. 1). Как зависит от угла α, образуемого стержнем с одной из сторон этого угла, ускорение середины стержня (точки C), если конец B стержня движется с постоянной скоростью $\vec{v}$?*

Рис. 1.

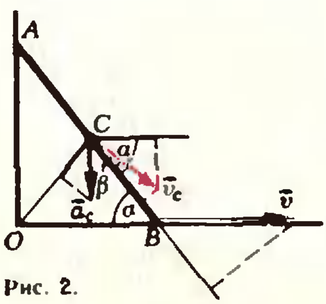


Рис. 2.

◆

Точка C при любом положении стержня находится на расстоянии $l/2$ от вершины O прямого угла (медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы). Следовательно, точка C движется по окружности радиуса $l/2$ с центром в точке O. Скорость v_c точки C направлена по касательной к траектории и в любой момент перпендикулярна OC.

Так как стержень нерастяжим, проекции скоростей точек C и B на направление стержня равны (рис. 2).

$$v\cos\alpha = v_c\cos\beta = v_c\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = v_c\sin 2\alpha.$$

Поэтому

$$v_c=\frac{v\cos\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{v}{2\sin\alpha}.$$

Проекция ускорения $\vec{a}_c$ точки C на радиус $OC=l/2$ должна быть равна $\frac{v_c^2}{l/2}=\frac{v^2}{2l\sin^2\alpha}$. Как направлен вектор $\vec{a}_c$? Заметим, что проекция скорости $\vec{v}_c$ точки C на горизонтальную ось равна $v_c\cos(\alpha-\beta)=v_c\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{v}{2}$. Эта величина не зависит от α и, следовательно, постоянна. Это означает, что вектор $\vec{a}_c$ направлен вертикально.

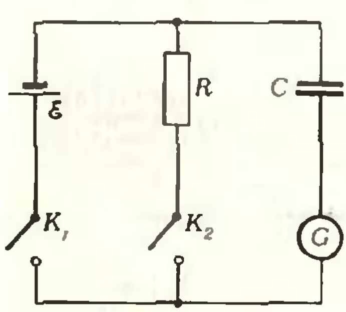
Таким образом,

$$a_c\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{v^2}{2l\sin^2\alpha},$$

откуда

$$a_c=\frac{v^2}{2l\sin^3\alpha}.$$

Ф580. *В схеме, показанной на рисунке, ЭДС батареи ℰ, ее внутреннее сопротивление r, сопротивление резистора R. При замыкании ключа K_1 стрелка гальванометра отклонится на угол α. На какой угол отклонится стрелка гальванометра, если при замкнутом ключе K_1 замкнуть ключ K_2? Отклонение стрелки пропорционально заряду, прошедшему через гальванометр.*



◆

После замыкания ключа K_1 напряжение на конденсаторе становится равным ℰ. При этом заряд конденсатора становится равным

$$q_1=C\mathcal{E}.$$

Такой заряд и проходит через гальванометр при замыкании ключа K_1. Следовательно,

$$\alpha=kq_1=kC\mathcal{E},$$

где $k=\mathrm{const}$ — коэффициент пропорциональности.

После замыкания ключа K_2 напряжение на конденсаторе становится равным напряжению на резисторе, то есть $U=IR$, где I — ток, текущий через резистор. Так как резистор включен последовательно с источником, $I=\mathcal{E}/(R+r)$. Следовательно, $U=\mathcal{E}R/(R+r)$. Заряд же конденсатора после замыкания ключа K_2 становится равным

$$q_2=CU=C\mathcal{E}\frac{R}{R+r}.$$

Следовательно, через гальванометр после замыкания ключа K_2 проходит заряд

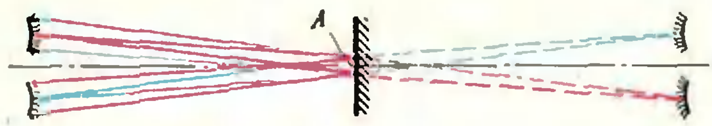
$$q=q_1-q_2=C\mathcal{E}\frac{r}{R+r}$$

и угол β отклонения стрелки гальванометра равен

$$\beta = kq = kC\mathscr{E}\frac{r}{R+r} = \alpha\frac{r}{R+r}.$$

Ф581. *Перед зеркалом стоит человек, закрыв один глаз. Изображение закрытого глаза в зеркале он закрывает, наклеивая на зеркало кусочек бумаги. Что увидит человек, если он откроет закрытый глаз и закроет открытый?*

На рисунке красными линиями показан ход лучей, идущих от левого глаза в правый, а синими линиями — от правого глаза в левый. Благодаря этим лучам изображение одного глаза видно другим глазом. Так как глаза расположены симметрично, ясно, что при наклеивании на участок A зеркала бумажки человек всегда будет видеть бумажку на месте изображения своего закрытого глаза.



Ф582. *Тело плавает в воде так, что 2/3 его объема погружены в воду. Какая часть объема тела будет находиться под водой, если сосуд с водой перемещать с ускорением $\vec{a}$ в вертикальном направлении?*

На тело действуют две силы: сила тяжести $M\vec{g}$ (M — масса тела) и сила $\vec{F}$, которая представляет собой равнодействующую всех сил давления жидкости, действующих на маленькие участки поверхности тела (рис. 1). Согласно второму закону Ньютона

$$\vec{F} + M\vec{g} = M\vec{a}.$$

Для того чтобы найти $\vec{F}$, воспользуемся следующим приемом. Выделим в жидкости объем V_1, равный объему погруженной в жидкость части тела и имеющий форму погруженной части тела (рис. 2). На этот выделенный объем со стороны остальной жидкости действует точно такая же сила $\vec{F}$, как и на тело. И так как выделенный объем жидкости вместе с сосудом движется вверх с ускорением $\vec{a}$, то

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a},$$

где m — масса выделенного объема жидкости. Поэтому

$$M(\vec{a} - \vec{g}) = m(\vec{a} - \vec{g}) \Rightarrow M = m.$$

Но $M = \varrho_т V$, а $m = \varrho V_1$, где V — объем тела, $\varrho_т$ — плотность тела и ϱ — плотность жидкости. Следовательно,

$$\varrho_т V = \varrho V_1.$$

Отсюда

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\varrho_т}{\varrho}.$$

Это отношение, как мы видим, не зависит от ускорения $\vec{a}$ сосуда и, следовательно, при любом ускорении одно и то же. Поэтому, с каким бы ускорением $\vec{a}$ ни двигался сосуд, объем погруженной части тела будет составлять 2/3 всего объема тела.

И. Слободецкий

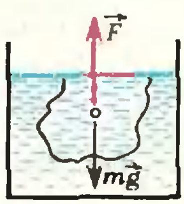


Рис. 1.

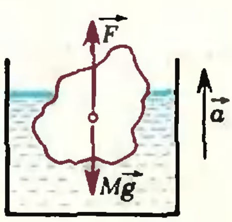


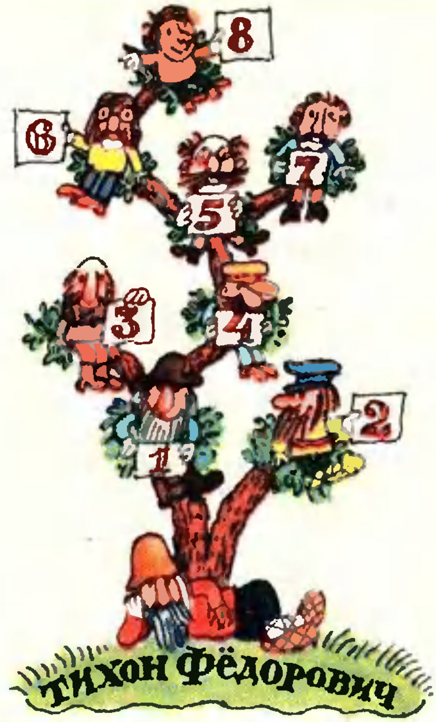
Рис. 2.

Несколько вопросов по астрономии

1. Есть ли такие места на Земле, где в течение всего года продолжительность дня равна продолжительности ночи?
2. Существует ли на экваторе смена времен года?
3. На какое время года приходятся на экваторе самые жаркие дни?
4. В день летнего солнцестояния (22 июня) высота кульминации Солнца (наибольшая высота Солнца над горизонтом) в средних северных широтах максимальная, в средних южных — минимальная. А на экваторе — промежуточная?

Н. Михайленко

Квант для младших школьников



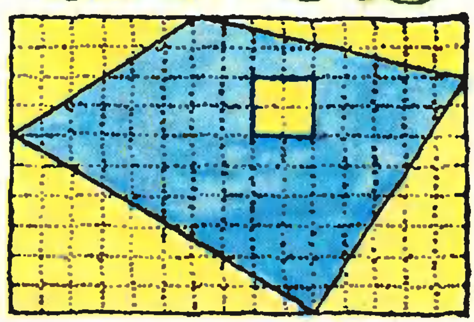
Задачи

1. Из бумаги склеили куб. Ясно, что его можно разрезать на шесть конгруэнтных квадратов. А можно ли его разрезать на двенадцать конгруэнтных квадратов?

2. На рисунке изображено родословное дерево одной семьи коми, родоначальником которой был некий Тихон Федорович. Вот все его потомки (на языке коми): Педот Тикöн, Öстап Тикöн, Тикöн Вась, Педот Вась, Падей Öстап, Тикöн Падей, Падей Илля, Тикöн Педот. Известно, что среди них нет женщин. Установите, какое имя соответствует каждому узлу дерева.

3. Найдите два числа, разность и частное которых были бы равны пяти.

4. Покажите, что площадь фигуры синего цвета (см. рисунок) равна половине площади прямоугольника.



5. В книгах новгородских писцов XV века упоминаются такие меры жидких тел: *бочка*, *насадка* и *ведро*. Из этих же книг стало известно, что 1 бочка и 20 ведер кваса уравниваются с тремя бочками кваса, а 19 бочек, 1 насадка и 15,5 ведра уравниваются с 20 бочками и 8 ведрами.

Могут ли историки на основании этих данных определить, сколько насадок содержится в бочке?

6. Рассмотрим трехзначные числа, начинающиеся и оканчивающиеся одинаковой цифрой, например 343. Докажите, что если сумма первой и второй цифр делится на 7, то и все число делится на 7.

Эти задачи нам предложили Н. Антонович, Ф. Бартенев, В. Беликов, А. Савин, Я. Тестелец

А. Дозоров

По страницам старого учебника

Однажды в библиотеке мне в руки попала одна старая книга. Это было двадцать первое издание «Учебника физики», рекомендованного к изучению в гимназиях, реальных училищах и других средних учебных заведениях. Автор учебника — известный педагог, сокурсник Д. И. Менделеева по педагогическому институту Константин Дмитриевич Краевич.

Этот учебник прослужил не одно десятилетие и всегда пользовался большой популярностью. Так, двенадцатое его издание было удостоено «полной премии Императора Петра Великого». Впрочем, учебником вполне можно пользоваться и сейчас. В нем не хватает лишь раздела о физике XX века да стиль изложения несколько отличается от современного.

Вот описание нескольких опытов, взятое из учебника К. Д. Краевича. При желании вы сможете провести эти опыты в домашних условиях.

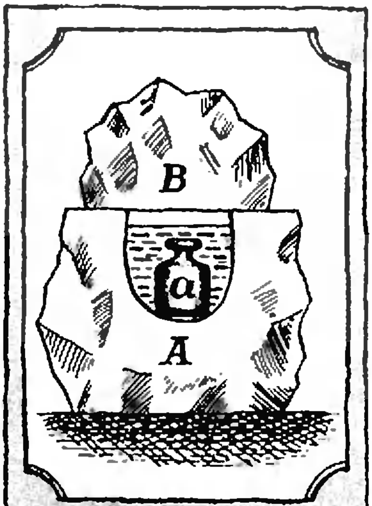


Рис.1

Опыт 1

«Если нагретое до некоторой температуры (например, до 50°С) тело a (например, стограммовую медную гирьку) поместить в углубление, сделанное в куске льда A и закрываемое другим куском льда B, то тело будет охлаждаться, уступая свою теплоту льду и превращая его в воду (рис. 1). Через некоторое время тело примет температуру растаявшей воды и льда, то есть 0°С, и дальнейшее таяние прекратится. Вода может быть собрана губкою, и количество образовавшейся воды определено взвешиванием; оно может служить мерою той теплоты, которую тело потеряло, охладившись от 50 до 0°С, и которую надо ему сообщить, чтобы нагреть его от 0 до 50°С.»

Ледяной калориметр обладает рядом преимуществ по сравнению с другими калориметрами. Главное из них — это практически полное отсутствие рассеяния тепла в окружающую среду.

Рис.2

Опыт 2

Известно, что трением можно добывать огонь. Но это требует определенного искусства. А вот вскипятить воду, используя трение, легко.

«Медная трубка (рис. 2), наполненная водою и закрытая пробкою, зажимается между двумя досками T, соединенными шарниром, и приводится в быстрое вращение. Преодолевая трение, можно заставить жидкость закипеть и образовавшимися парами выбросить пробку.»

Опыт 3

Для этого опыта вам понадобятся металлическая сетка или рассекатель пламени для газовой плиты, газовая горелка или обыкновенная газовая плита. Во избежание неприятностей при проведении эксперимента будьте очень осторожны.

«Если покрыть пламя газа сеткою, то горение за сетку не переходит (рис. 3, *а*); точно так же, если незажженный газ пропустить через сетку и потом зажечь, то пламя вниз не передается (рис. 3, *б*). В обоих случаях металл сетки отнимет от газа значительную часть тепла, которое распространяется по всей сетке и постепенно теряется в воздухе; оставшаяся в газе теплота недостаточна, чтобы горение продолжалось.»

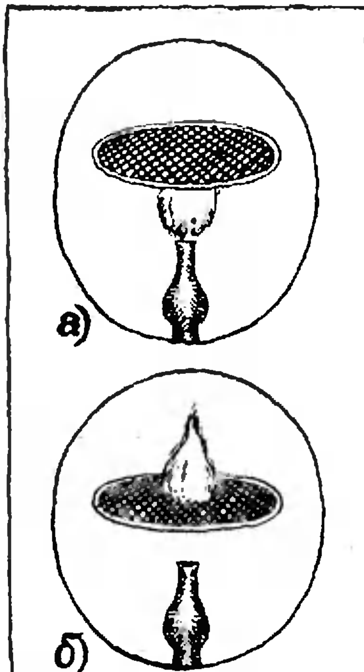


Рис. 3

Опыт 4

Если каким-либо образом менять плотность одного и того же тела, его можно заставить то всплывать, то тонуть в жидкости.

«Так, рыба, изменяя объем своего тела посредством плавательного пузыря, поднимается, опускается и держится на месте.

В картезианском водолазе стеклянный шарик *а*, наполненный частью водою, частью воздухом и имеющий внизу отверстие, плавает на поверхности воды (рис. 4). Надавливая на каучуковую перепонку *в* и сжимая воздух, который давит на воду, мы заставляем воду входить в шарик и сжимать находящийся в шарике воздух. Шарик делается тяжелее, вследствие чего он опускается и при надлежащем давлении может держаться внутри жидкости. С прекращением давления сжатый в шарике воздух вытесняет воду, и шарик снова подымается.»

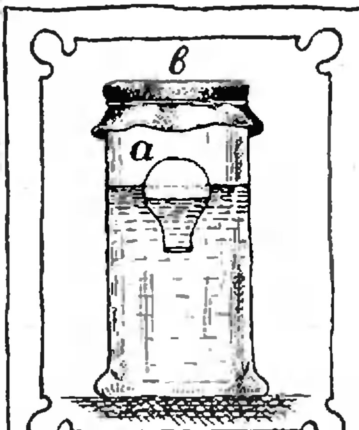


Рис. 4

Опыт 5

«Если намагничиваемый стальной брусок мал, то одного прикосновения к сильному магниту бывает достаточно, чтобы его намагнитить. Для намагничивания же больших стальных полос применяют следующий предложенный Дюгамелем способ. Стальную полосу AB кладут на два разноименных полюса S и N двух магнитов (рис. 5). Затем ставят наклонно на середину два других магнита P и Q так, чтобы P касался намагничиваемой полосы северным, а Q — южным полюсом, и проводят ими по полосе AB от ее середины до концов. Потом магниты подымают, ставят снова на середину AB и повторяют прежнее действие несколько раз... Намагничиваемый брусок полезно при этом поворачивать и подвергать, постукивая по нему, сотрясениям.»

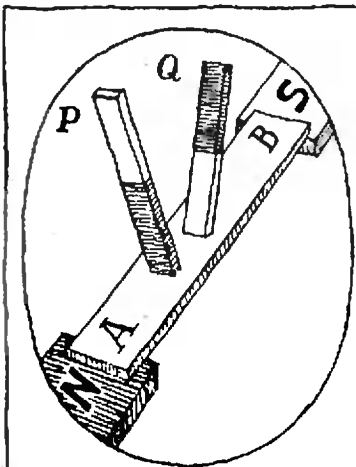


Рис. 5

Н. Розов

Читатели советуют

В письмах и заметках, присылаемых в «Квант» учащимися, преподавателями, любителями математики, часто затрагиваются вопросы, относящиеся к тематике «Практикума абитуриента». Читатели журнала высказывают замечания теоретического характера, сообщают приемы решения отдельных типов задач, дают методические советы, предлагают самостоятельно придуманные упражнения. Далеко не всегда содержащиеся в этих письмах и заметках соображения и задачи являются новыми и оригинальными, однако с некоторыми из них, по нашему мнению, полезно познакомить готовящихся к вступительным экзаменам в вузы. Поэтому редакция решила подготовить очередную подборку материалов, составленную по идеям к предложениям читателей «Кванта», с необходимыми дополнительными комментариями.

В вариантах вступительных экзаменов по математике нередко встречаются системы уравнений. Поступающие, как правило, хорошо знакомы с основными приемами решения систем — методом подстановки и методом исключения. На интересное соображение, позволяющее решать некоторые системы уравнений, обращает внимание читатель журнала *П. Чеботарев* (Москва). Однако, прежде чем рассказать об этом, немного поговорим о сложных функциях специального вида.

Пусть дана функция f, причем для простоты будем считать, что $D(f)=\mathbf{R}$. Исходя из этой функции, можно образовать новую функцию

$$F(x)=f(f(x));$$

она, очевидно, определена также на всей числовой прямой. Функцию F принято называть *итерацией**) функции f. Из рисунка 1 легко понять, каким образом с помощью графика функции f находится значение итерации $f(f(x_*))$ для конкретного значения x_* аргумента.

Рассмотрим уравнение

$$f(f(x))=x. \qquad (1)$$

Прежде всего заметим, что если x_0 — корень уравнения

$$f(x)=x, \qquad (2)$$

то x_0 — корень и уравнения (1). Но уравнение (1) может, конечно, иметь и другие корни, не являющиеся корнями уравнения (2) (попытайтесь усмотреть этот факт из рисунка 1).

Поскольку уравнение (2) явно проще уравнения (1), полезно указать ситуации, в которых эти уравнения равносильны. Докажем, например, следующее предложение: *если функция f при некотором a удовлетворяет условиям*

$$\begin{cases} f(x)\geqslant x, & \text{при всех } x<a,\\ f(a)=a, & \\ a\leqslant f(x)\leqslant x, & \text{при всех } x>a, \end{cases} \qquad (3)$$

то уравнения (1) *и* (2) *равносильны* (дайте геометрическую интерпретацию этой теоремы).

Выше уже отмечалось, что корни уравнения (2) всегда служат корнями уравнения (1); установим справедливость обратного утверждения. Пусть x_0 — корень уравнения (1):

$$f(f(x_0))=x_0; \qquad (4)$$

*) Вообще *итерацией* (от латинского *iteratio* — повторение) в математике называют результат повторного применения какой-нибудь операции.

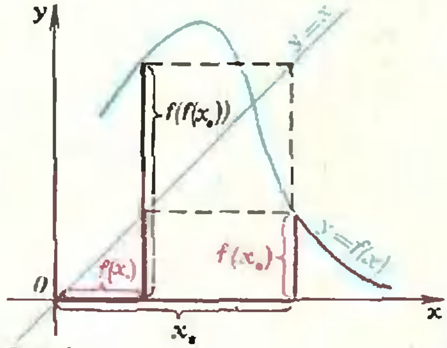


Рис. 1.

рассмотрим каждый из возможных случаев $x_0>a$, $x_0<a$, $x_0=a$ в отдельности.

Если $x_0>a$, то (см. (3))

$$a\leqslant f(x_0)\leqslant x_0. \qquad (5)$$

Из свойств (3) функции f следует, что неравенства $a\leqslant f(z)\leqslant z$ имеют место при любом $z\geqslant a$. Поэтому, выбрав $z=f(x_0)$, будем, учитывая (5), иметь

$$a\leqslant f(f(x_0))\leqslant f(x_0). \qquad (6)$$

Из соотношений (6) и (5) ясно, что

$$f(f(x_0))\leqslant f(x_0)\leqslant x_0.$$

Сравнивая эту цепочку неравенств с равенством (4), заключаем, что $f(x_0)=x_0$, то есть x_0 — корень уравнения (2).

Допустим, далее, что $x_0<a$. В этом случае неравенство $f(x_0)\geqslant a$ невозможно: если бы оно имело место, то выполнялось бы соотношение (6), которое, с учетом неравенства $x_0<a$, привело бы к противоречию с равенством (4). Таким образом, если $x_0<a$, то $f(x_0)<a$. Из свойств (3) функции f следует, что неравенство $f(z)\geqslant z$ имеет место при любом $z<a$. Поэтому, выбрав сначала $z=x_0$ и затем $z=f(x_0)$, будем иметь

$$x_0\leqslant f(x_0)\leqslant f(f(x_0)).$$

С помощью равенства (4) снова заключаем, что $f(x_0)=x_0$.

Случай $x_0=a$ очевиден. Следовательно, при условиях (3) любой корень уравнения (1) является корнем уравнения (2).

В заключение отметим, что по заданной функции f можно, очевидно, определить также функции

$$f(f(f(x))),\ f(f(f(f(x)))),\ \ldots$$

Справедливо следующее предложение (докажите его самостоятельно): *если функция f удовлетворяет условиям* (3), *то каждое из уравнений*

$$f(f(f(x)))=x,\ f(f(f(f(x))))=x,\ \ldots$$

равносильно уравнению (2).

А теперь посмотрим, как сформулированные предложения удается использовать для решения таких систем, в которых все уравнения одинаковы с точностью до обозначения переменных и в каждое уравнение входят лишь две переменные.

Пример 1 (МГУ, мехмат, 1977). *Найти все решения системы уравнений*

$$\begin{cases} y^3-6x^2+12x-8=0,\\ z^3-6y^2+12y-8=0,\\ x^3-6z^2+12z-8=0.\end{cases}$$

Определим функцию

$$f(x)=\sqrt[3]{6x^2-12x+8},\ x\in\mathbf{R}; \qquad (7)$$

тогда данную систему можно переписать в виде

$$y=f(x),\ z=f(y),\ x=f(z). \qquad (8)$$

Используя метод подстановки, получаем отсюда

$$f(f(f(x)))=x. \qquad (9)$$

Прежде всего рассмотрим уравнение $f(x)=x$, или

$$x^3-6x^2+12x-8=0.$$

Оно имеет единственный корень $x=2$ (сгруппируйте первый член левой части с последним и второй с третьим), который является корнем и уравнения (9). Из выражения (7) для функции f и уравнений (8) получаем решение исходной системы: (2; 2; 2).

Проверим, что функция (7) удовлетворяет условиям (3) при $a=2$, а потому уравнение (9) не имеет корней, помимо $x=2$. Неравенство $f(x)\geqslant x$, которое в данном случае приводится к виду

$$(x-2)^3\leqslant 0$$

(проведите необходимые преобразования), действительно выполняется при $x<2$, а $f(2)=2$. Далее, ясно, что $f(x)\leqslant x$ при всех $x>2$. Наконец, неравенство $f(x)\geqslant 2$ легко переписать в форме

$$6x^2-8x\geqslant 0,$$

откуда видно, что оно справедливо при $x>2$.

Следовательно, исходная система имеет единственное решение (2; 2; 2).

Упражнения

1. Найдите итерацию $f(f(x))$, если:

а) $f(x)=\sin x$;

б) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$;

в) $f(x)=-x^2+1$.

2. Определите функцию $f(f(f(x)))$, если
$$f(x)=-x+3.$$

3. Решите уравнения $f(x)=x$ и $f(f(x))=x$, если:

а) $f(x)=-x^2+1$;
б) $f(x)=-x+3$.

4. Докажите, что если
$$f(x)<x \text{ при всех } x\in\mathbf{R}$$
или если
$$f(x)>x \text{ при всех } x\in\mathbf{R},$$
то уравнение $f(f(x))=x$ имеет своими корнями только корни уравнения $f(x)=x$.

5. Докажите, что если
$$\begin{cases} f(x)<x \text{ при всех } x<a,\\ f(a)=a,\\ f(x)>x \text{ при всех } x>a,\end{cases}$$
то уравнение $f(f(x))=x$ имеет единственный корень $x=a$.

Решите системы уравнений:

6. $\begin{cases} x-5y=2y^2+2,\\ y-5z=2z^2+2,\\ z-5x=2x^2+2.\end{cases}$

7. $\begin{cases} x=\dfrac{2y^2}{1+y^2},\\ y=\dfrac{2z^2}{1+z^2},\\ z=\dfrac{2x^2}{1+x^2}.\end{cases}$

8. (МГУ, мехмат, 1977).
$$\begin{cases} y^3+2x^2+6x+12=0,\\ z^3+2y^2+6y+12=0,\\ x^3+2z^2+6z+12=0.\end{cases}$$

* * *

Следующую задачу в редакцию прислали ученики 9 класса *Любовь Болычевцева* и *Евгений Петров* (Харьков):

9. Могут ли при каком-нибудь значении a графики функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ касаться друг друга?

Поясним, что две кривые касаются друг друга, если они в некоторой общей точке имеют общую касательную.

* * *

Очень важное письмо прислал в редакцию наш читатель *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону). Он указывает, что в статье Я. Суконника и П. Горнштейна «Геометрические решения геометрических задач» («Квант», 1979, № 9, с. 38) при решении задачи 1 допущена серьезная ошибка.

Напомним, о какой задаче идет речь.

Пример 2. *Около треугольника AMB описана окружность, центр которой удален от стороны AM на расстояние 10. Продолжение стороны AM за вершину M пересекается в точке C с касательной к этой окружности, проведенной через вершину B. Найти площадь треугольника BMC, если известно, что*
$$|BC|=29,\ \widehat{ACB}=\operatorname{arctg}\frac{20}{21}.$$

Условие почти любой геометрической задачи не дает определенного, исчерпывающего описания того, какая именно конфигурация (фигура) имеется в виду: фиксируются только некоторые ее свойства, характеристики или параметры, а остальные в условии не детализируются. Если в условии задачи говорится просто о «треугольнике AMB», то с логической точки зрения этот треугольник может быть, к примеру, и остроугольным, и прямоугольным, и тупоугольным. В большинстве случаев для решения задачи не требуется знать те свойства конфигурации, которые не уточнены в условии, и ответ от них, естественно, не зависит.

Однако в ряде более серьезных задач бывает необходимо начинать решение с выяснения или уточнения отдельных свойств конфигурации, которые явно в условии не оговорены, но выводятся из него путем рассуждений. Скажем, для решения задачи нужно в первую очередь установить, что рассматриваемый треугольник AMB на самом деле не может быть оустроугольным. В подобных задачах особенно важно не упустить из виду ни одной логической возможности и по поводу каждой из них выяснить, совместима ли соответствующая конфигурация с данными условия задачи.

Все сказанное относится к сформулированной выше задаче — для ее решения прежде всего требуется извлечь из условия дополнительную информацию о фигуре, уточнить ее вид. В упомянутой статье решение этой задачи начинается по существу с доказательства того, что треугольник AMB не является остроугольным (хотя там об этом прямо и не сказа-

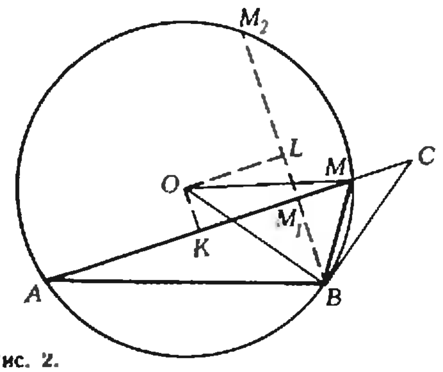


Рис. 2.

но). Если же угол AMB — прямой, то тогда получается ответ:

$$S_{BMC}=210. \qquad (10)$$

Однако тем самым далеко не исчерпываются все логически возможные типы углов треугольника AMB (или, что то же самое, все возможные расположения центра описанной окружности), а проведенные в статье рассуждения существенно опираются на чертеж, относящийся лишь к остроугольному треугольнику AMB. Правда, случаи

угол MAB — прямой,
угол MAB — тупой,
угол ABM — прямой,
угол AMB — тупой

по различным причинам несовместимы с данными условия задачи (приведите необходимые обоснования). Остается последняя возможность: угол ABM — тупой (рис. 2).

Опустим из точки B перпендикуляр BM_1 на сторону AM и продолжим его до пересечения с окружностью в точке M_2, а центр окружности O спроектируем на хорды AM и BM_2. Тогда, как легко проверить,

$$|BM_1|=|BC|\sin\widehat{ACB}=20=2|OK|,$$
$$|BM_2|=2(|BM_1|+|M_1L|)=3|BM_1|;$$

последнее соотношение, в отличие от случая остроугольного треугольника AMB, не противоречит условию задачи. Если теперь последовательно рассмотреть треугольники BM_1C, BOL, OKM и заметить, что $\widehat{OBL}=\widehat{ACB}$, мы придем к ответу (убедитесь в этом):

$$S_{BMC}=\frac{1}{7}(3470-600\sqrt{22}). \qquad (11)$$

В геометрии обычно принято так формулировать задачу, чтобы ответ оказывался одним и тем же для любой конфигурации в пределах того произвола, который допускает условие. С этой точки зрения приведенная формулировка задачи неудачна: в зависимости от того, прямоугольным или тупоугольным является треугольник AMB, получаются разные ответы (10) или (11). Для того чтобы такой неоднозначности не было, условие задачи должно начинаться так: *«Около нетупоугольного треугольника AMB...»*, тогда задача имеет единственный ответ (10). Однако авторы указанной выше статьи по недосмотру опустили слово «нетупоугольного» в тексте условия задачи.

* * *

Многие читатели присылают в своих письмах различные алгебраические уравнения степени выше второй, для решения которых нужно «увидеть» путь разложения многочлена на множители, подчас довольно хитрый. Вот два таких уравнения, предложенные учеником 8 класса *Александром Матвеевым* (Рига):

Решите уравнения:
10. $x^3+x^2-5x-6=0$.
11. $x^4-10x^3+24x^2-6x-9=0$.

* * *

Школьникам хорошо известно, что для решения задач на экстремумы существует универсальный метод, связанный с использованием производной. Однако это не значит, что в любой задаче такой метод проще и быстрее всего приводит к цели. Иногда лучше не спешить дифференцировать, а попытаться выяснить, нельзя ли воспользоваться какими-нибудь особенностями рассматриваемой конкретной задачи.

Именно об этом и напоминает читателям «Кванта» в своем письме *С. Берколайко* (с. Котово Белгородской обл.).

Пример 3. *Найти площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, имеющего наибольший объем, если известно, что*

$$|AC|=2\sqrt{2}, \quad |AA_1|=1.$$

Поскольку высота параллелепипеда задана, наибольший объем будет иметь параллелепипед с наибольшей площадью основания $ABCD$. Если обозначить через x длину одной стороны прямоугольника $ABCD$, то $\sqrt{8-x^2}$ — длина его другой стороны. Таким образом, вопрос о том, когда основание имеет наибольшую площадь, сводится к отысканию наибольшего значения функции

$$S(x)=x\sqrt{8-x^2}\ .$$

Стандартный метод решения такой задачи путем исследования производной $S'(x)$ требует проведения некоторых преобразований и вычислений.

Этого можно избежать, если несколько менее шаблонно подойти к задаче нахождения прямоугольника наибольшей площади с заданной длиной диагонали. Выберем в качестве переменной величину угла α между диагоналями прямоугольника $ABCD$. Тогда для его площади получается выражение (проверьте!)

$$S(\alpha)=4\sin\alpha,$$

откуда сразу же, без всякого дифференцирования, видно, что наибольшую площадь имеет квадрат со стороной длины 2. Следовательно, площадь боковой поверхности параллелепипеда равна 8.

* *
*

Понятие предела последовательности — одно из важнейших в школьном курсе математики и одновременно одно из труднейших для учащихся. Обычно школьники знают, что такое предел последовательности (то есть могут на память с к а з а т ь определение), но далеко не все достаточно глубоко это определение понимают (то есть могут с ним свободно р а б о т а т ь). *В. Лебеденко* (г. Дубна Московской обл.) прислал в редакцию задачу (правда, довольно известную), решение которой требует именно понимания определения предела последовательности.

12. Существует ли предел последовательности

$$x_n=\sin n?$$

* *
*

Владение разнообразными приемами преобразований имеет в математике большое значение — нисколько не меньшее, чем знание различных теорем или умение проводить логические рассуждения. Один из этих приемов состоит в том, чтобы прибавить и вычесть некоторое удачно подобранное выражение. Именно так часто поступают, например, при разложении многочленов на множители.

Ученик 9 класса *Аваз Нагиев* (п. Минджевань Зангеланского р-на Азербайджанской ССР) приводит такой пример:

П р и м е р 4. *Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную при $x=a$, то*

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a). \quad (12)$$

Прежде чем вычислять предел, проведем следующие алгебраические преобразования данного выражения (считая, что $x\neq a$):

$$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$$
$$=\frac{xf(a)-af(x)+af(a)-af(a)}{x-a}=$$
$$=\frac{xf(a)-af(a)}{x-a}-\frac{af(x)-af(a)}{x-a}=$$
$$=f(a)-a\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ .$$

Отсюда уже ясно, что указанный в (12) предел действительно существует, если существует $f'(a)$ и равенство (12) справедливо.

* *
*

Предлагаем читателям журнала самостоятельно решить еще две задачи. Первую из них прислал нам ученик 10 класса *Аладдин Эйвазов* (с. Ашурлу Масаллинского р-на АзССР), вторую — ученик 10 класса *Андрей Казаринов* (Тольятти).

13. Решите уравнение

$$3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162.$$

14. Три окружности расположены в одной плоскости так, что каждая из них проходит через центры двух других. Найдите площадь фигуры, являющейся объединением всех трех кругов, если известно, что площадь пересечения всех трех кругов равна S.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1979 году

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

На выполнение работы абитуриентам было предоставлено пять часов.

Вариант 1

(механико-математический, физический, экономический факультеты)

1. Расстояние между пунктами A и B равно 120 км. Мотоциклист, двигаясь без остановок, проедет это расстояние за 8 часов, если от A до промежуточного пункта C он будет ехать со скоростью v_0 км/ч, а далее — с ускорением a км/ч^2. Одно и то же время на весь путь ему понадобится, если от A до C он будет ехать со скоростью v_0 км/ч и от C до B — v_1 км/ч или от A до C со скоростью v_1 км/ч и от C до B — v_0 км/ч. Найти v_0, если параметр a по величине равен $2v_0$ и $v_0 \neq v_1$.

2. Решить неравенство

$$\log_{x^2+2x-3}\frac{|x+4|-|x|}{x-1}>0.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\sqrt{3}\cos x+\sin x-2}+\sqrt{\operatorname{ctg}3x+\sin^2 x-\frac{1}{4}}=\sin\frac{3x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Острый угол ABC ромба $ABCD$ имеет величину 60°. Окружность проходит через центр ромба, касается прямой AB в точке B и пересекает сторону CD в точке E. Определить, в каком отношении точка E делит отрезок CD.

5. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 2, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $|SA|=3$. На лучах AB и SB выбраны точки M и N соответственно так, что $|AM|>|AB|$, $|SN|>|SB|$. Шар касается граней трехгранного угла с ребрами BC, BM, BN и плоскости SAC. Найти радиус шара.

Вариант 2

(геолого-геофизический факультет и факультет естественных наук)

1. Два автомобиля едут навстречу друг другу и встречаются через 6 дней. Если бы первый автомобиль ехал 1,8 дня, а второй — 1,6 дня, то вместе они бы проехали 520 км. Если бы первый проехал 2/3 пути, пройденного вторым, а второй — 1/3 пути, пройденного первым, то первому понадобилось бы для этого на 2 дня меньше, чем второму. Сколько километров за день проезжает каждый автомобиль?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}+6\dfrac{x-y}{x+y}=5\\ xy=2.\end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$2\cos 2x-2\sqrt{3}\sin 2x+2\sqrt{3}\sin x-6\cos x-1=0.$$

4. В невыпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол ABC прямой, $|AB|=|BC|=a$. Из вершины D, как из центра, проведена окружность, касающаяся сторон AB, BC и прямой, проходящей через вершины A и C. Определить площадь пересечения ограниченного этой окружностью круга и четырехугольника $ABCD$.

5. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1, $ABCD$ — основание, AC — диагональ основания, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. Точки M, N и K лежат на ребрах AA_1, D_1C_1 и CC_1 соответственно, причем $|A_1M|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|D_1N|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $|CK|=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Через точку K проходит прямая l, параллельная прямой MN. Найти длину части прямой l, заключенной внутри куба.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

В 1979 году каждый вариант письменного экзамена по физике состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент, хорошо представляя явление, может сам задать необходимые значения и получить численный ответ. Опыт вступительных экзаменов в НГУ показывает, что с задачами-оценками справляется значительная часть абитуриентов, зачисленных на физический факультет.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое на экзамене. Здесь важно понять сущность явления и среди различных физических факторов выделить главный.

Вариант 1

1. С наклонной плоскости, угол наклона которой α, соскальзывает без трения клин B (рис. 1). Верхняя грань клина горизонтальна. На клине покоится тело массой m. Найти силу трения, действующую на тело. Ускорение силы тяжести равно g.

2. Участки AB и CD узкой стеклянной трубки заполнены воздухом, BC и DE — ртутью, в участке EF — вакуум (рис. 2). Длины всех участков одинаковы. Давление в нижней точке A равно p. Трубку осторожно переворачивают так, что точка F оказывается внизу. Каким станет давление в точке F? Температура не изменяется.

3. В цепи, состоящей из заряженного конденсатора и катушки индуктивностью L, замыкают ключ K (рис. 3). По какому закону в зависимости от времени должна изменяться емкость конденсатора, чтобы ток в цепи нарастал прямо пропорционально времени t? Начальная емкость конденсатора равна C_0.

4. *Оценить*, с какой минимальной частотой вы должны вращать ведро с водой в вертикальной плоскости, чтобы вода не выливалась.

5. Между двумя параллельными плоскими зеркалами расположен источник света — электрическая лампочка. После включения лампочки на экране, перпендикулярном к зеркалам, появляются светлые и темные полосы. Объяснить явление.

Вариант 2

1. Частица с зарядом q и массой m, находясь на расстоянии l_0 от заряженной плоскости, имела скорость $\vec{v}$, направленную под углом α к плоскости (рис. 4). Плоскость, заряженная с неизменяющейся плотностью заряда на единицу площади σ, движется поступательно с постоянной скоростью $\vec{u}$, перпендикулярной к плоскости. На какое минимальное расстояние l частица приблизится к плоскости?

2. Два гладких шарика массой m и M подвешены к одной и той же точке O, как показано на рисунке 5. Радиус большого шарика равен R; длина нити, его удерживающей, равна l. Какой угол α эта нить образует с вертикалью?

3. В вертикально стоящем закрытом цилиндрическом сосуде высотой $2l$ и площадью сечения S находится тяжелый поршень массой m (рис. 6). Первоначально поршень уравновешен и делит объем сосуда пополам. Над поршнем находится гелий при давлении p_0, под поршнем — кислород. Поршень проницаем для гелия и непроницаем для кислорода. Через некоторое время поршень занимает новое равновесное положение. Найти величину смещения поршня. Температура постоянна, трением пренебречь.

4. *Оценить* давление шариковой ручки на бумагу.

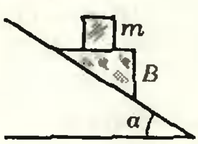


Рис. 1.

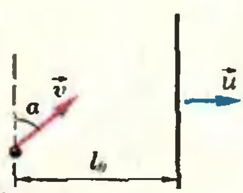


Рис. 4.

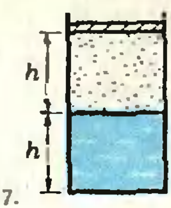


Рис. 7.

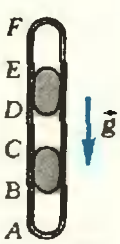


Рис. 2.

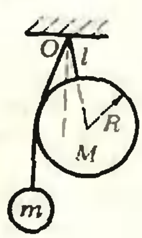


Рис. 5.

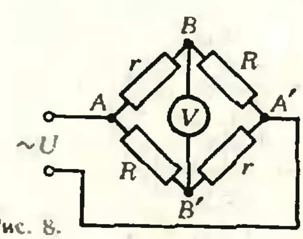


Рис. 8.

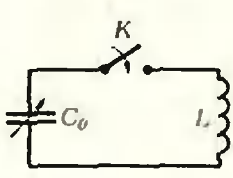


Рис. 3.

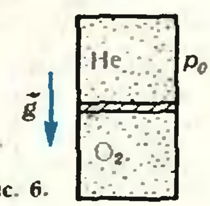


Рис. 6.

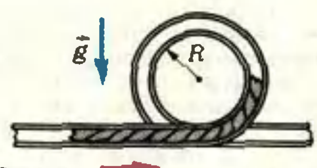


Рис. 9.

5. Имеются два различных источника напряжения, обеспечивающие одинаковую интенсивность свечения электрической лампочки. При кратковременном подключении к выходным клеммам источников катушки индуктивности только один источник дает интенсивный дуговой разряд. Объяснить наблюдаемое явление.

Вариант 3

1. В трубке над поверхностью воды находится воздух, сжатый покоящимся тяжелым поршнем до давления $p=3\cdot10^5$ Па (рис. 7). Расстояние от поршня до поверхности воды h, глубина слоя воды тоже h, температура воздуха и воды $t=6°C$. На каком расстоянии от поверхности воды окажется поршень, если трубку с водой нагреть до температуры $t_1=100°C$? Давлением паров воды при температуре $t=6°C$ можно пренебречь. Поршень может двигаться без трения.

2. В цепи с источником переменного напряжения вольтметр при включении между точками BB' показывает втрое меньшее напряжение, чем при включении между точками AA' (рис. 8). Выразить неизвестное сопротивление R через известное r.

3. В горизонтальной гладкой трубе имеется кольцевой изгиб радиусом R, расположенный в вертикальной плоскости (рис. 9). С какой минимальной скоростью должен двигаться на горизонтальном участке трубы тяжелый тонкий гибкий канат длиной $l>2\pi R$, чтобы он смог пройти через изгиб?

4. *Оценить* выталкивающую силу, действующую на вас со стороны воздуха в аудитории.

5. Подвижный поршень, замыкающий объем газа, в котором находится кусочек ваты, смоченной ацетоном, поднимают вверх. Объяснить характер изменения давления в объеме, измеряемого жидкостным манометром.

Г. Меледин, В. Пененко

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^4+(1-2a)\,x^2+a^2-1=0$$

а) не имеет решений?
б) имеет одно решение?
в) имеет два решения?
г) имеет три решения?

2. Решите неравенство

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2-\log_{\frac{1}{2}} x^2>(\log_{\frac{1}{2}} 3)^2-1.$$

3. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{x^2-1}}.$$

4. Найдите предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot\sin x-\operatorname{tg} x}{x^2\cdot\sin x}.$$

5. Радиус основания конуса равен R, а угол развертки его боковой поверхности равен 90°. Найдите объем конуса.

Вариант 2

(факультет прикладной математики)

1. Вычислите предел

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{a-2}{\sqrt{x+4}}=1.$$

3. В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 66, произведение второго и предпоследнего членов равно 128, сумма всех членов равна 126. Сколько членов в прогрессии?

4. Решите уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0.$$

5. Основанием прямой призмы служит ромб $KBCD$ со стороной a и углом $\widehat{DKB}=60°$. Концы B_1 и D_1 диагонали верхнего основания призмы соединены прямыми B_1E и D_1F с серединами сторон KD и KB нижнего. В пересечении этих прямых образуется угол B_1OD_1, равный α. Определить объем призмы.

Вариант 3

(физический факультет и факультет радиофизики и электроники)

1. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\log_{0,4}(x-x^2)}$.

2. Найдите сумму $1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}$, а затем сумму $2x+4x^3+\ldots+2n\cdot x^{2n-1}$.

3. Докажите тождество

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$$

5. Каждое из боковых ребер четырехугольной пирамиды образует с высотой угол α. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом β между диагоналями. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна h.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет и факультет радиофизики и электроники

1. На доске стоит прямой однородный цилиндр высотой $h=2,5$ см и диаметром $D=10$ мм. Один конец доски медленно поднимают. При каком угле α наклона доски к

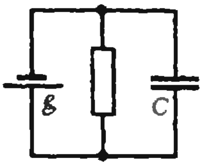


Рис. 1.

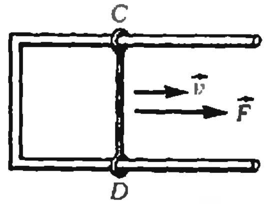


Рис. 2.

горизонту нарушится равновесие цилиндра относительно доски, если коэффициент трения $\mu = 0{,}5$?

2. Парафиновый шар, начиненный свинцовой дробью, плавает на поверхности воды так, что $n = 0{,}1$ его объема находится над водой. Во сколько раз объем свинца V_c меньше объема парафина $V_п$? Плотность свинца $\varrho_c = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность парафина $\varrho_п = 0{,}86 \cdot 10^3$ кг/м³.

3. Температура газа в баллоне повысилась на ΔT кельвинов. При этом давление газа увеличилось на $1/n$ часть первоначального значения. До какой температуры T нагрели газ?

4. Определить заряд конденсатора q, если при коротком замыкании источника ток через него увеличивается в n раз (рис. 1). ЭДС источника равна $\mathcal{E}$, емкость конденсатора — C.

5. Под действием силы $\vec{F}$ ($|\vec{F}| = 1$Н) проводник CD, сопротивление которого $R = 1$ Ом, скользит, не теряя контакта, по металлической раме с постоянной скоростью $\vec{v}$($|\vec{v}| = 0{,}1$ м/с) (рис. 2). Система расположена в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамы. Определить ток I в проводнике. Трением и сопротивлением рамы пренебречь.

6. На воду налит слой кедрового масла. Можно ли подобрать угол падения света из воздуха на масло такой, чтобы на границе масло — вода произошло полное отражение света? Показатель преломления воды $n_в = 1{,}33$, масла $n_м = 1{,}52$.

7. Собирающая линза дает мнимое увеличенное в два раза ($\Gamma_1 = 2$) изображение предмета. Каким будет увеличение Γ_2, если, не изменяя положения предмета, собирающую линзу заменить рассеивающей с таким же фокусным расстоянием?

Механико-математический факультет и факультет прикладной математики

1. Тяжелый шарик, подвешенный на легком резиновом жгутике, растягивает его на $\Delta l = 5$ см. Каким будет максимальное растяжение X_{max}, если шарик поднять и затем отпустить с высоты $h = 20$ см, отсчитанной от нижнего конца нерастянутого жгутика? Деформацию жгутика считать упругой.

2. Математический маятник за некоторый промежуток времени совершает $N_1 = 12$ колебаний. После укорачивания нити маятника на $\Delta l = 28$ см он совершает за то же время $N_2 = 16$ колебаний. Определить первоначальную длину маятника l.

3. Цилиндрическая трубка с запаянным верхним концом вертикально опускается в ртуть так, что запаянный конец совпадает с поверхностью ртути в сосуде. При этом высота воздушного столба в трубке равна h. Определить длину трубки l. Атмосферное давление равно p, температуру считать постоянной.

4. Электрическая энергия постоянного тока передается по двухпроводной алюминиевой линии на расстояние $l = 400$ км при плотности тока (токе, текущем через единицу площади поперечного сечения проводника) $j = 1$ А/мм². Достаточным ли будет напряжение $U = 500$ кВ для того, чтобы потери в линии передачи не превышали $\eta = 5\%$ передаваемой мощности? Удельное сопротивление алюминия $\varrho = 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

5. Металлическое кольцо диаметром D и сопротивлением R расположено в однородном магнитном поле так, что плоскость кольца перпендикулярна вектору магнитной индукции $\vec{B}$. Кольцо вытягивают в сложенную вдвое прямую; при этом площадь, ограниченная контуром проводника, уменьшается равномерно. Определить заряд q, протекший по проводнику.

6. На стеклянный клин с углом $\alpha = 2{,}0°$ перпендикулярно к грани клина падает луч белого света. На какой угол β разойдутся после выхода из клина красный и фиолетовый лучи вследствие дисперсии, если показатель преломления стекла для красных лучей равен $n_к = 1{,}74$, а для фиолетовых $n_ф = 1{,}80$?

7. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы, фокусное расстояние которой равно F. Вплотную перед линзой расположена диафрагма, имеющая отверстие в виде круга некоторого диаметра. Пучок преломленных лучей в фокальной плоскости линзы имеет диаметр в $n (n > 1)$ раз больше диаметра диафрагмы. Определить расстояние d от линзы до источника.

Химический факультет

1. Маленький тяжелый шарик, подвешенный на нити, совершает колебания в вертикальной плоскости. Наибольший угол отклонения нити от вертикали $\alpha = 60°$. Во сколько раз модуль N_1 максимальной силы натяжения нити больше модуля N_2 минимальной силы?

2. При изохорном охлаждении на $\Delta T = 3$К давление газа понизилось на 1%. Определить температуру T, до которой охлажден газ.

3. Гальванометр рассчитан на максимальный ток I. Какое добавочное сопротивление R_1 нужно последовательно подключить к гальванометру для того, чтобы им можно было измерять напряжения до максимального значения U? Известно, что при параллельном подключении к гальванометру сопротивления R_2 (шунта) предел измерения тока увеличивается в n раз.

4. Пучок однократно ионизированных изотопов магния ^{24}Mg и ^{25}Mg влетает в однородное магнитное поле. Определить радиус окружности R_1 движения легких изотопов, если для тяжелых изотопов он равен R_2. Скорость всех ионов в пучке считать одинаковой.

5. Фотоэффект вызывается облучением металла светом длиной волны λ. Найти задерживающее напряжение $U_з$, если длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта, равна λ_0.

Г. Кембровский, А. Самусенко, А. Саржевский

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Площадь треугольника ABC равна 1. Найти площадь треугольника PQR, если точки P, Q, R принадлежат соответственно медианам AK, BL, CN и $\frac{|AP|}{|PK|}=1$, $\frac{|BQ|}{|QL|}=\frac{1}{2}$, $\frac{|CR|}{|RN|}=\frac{5}{4}$.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}.$$

3. Решить уравнение

$$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cos x.$$

4. Найти все значения параметра a, для которых неравенство

$$(a-1)x^2-(a+1)x+(a+1)>0$$

выполнено для всех действительных x.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 1. Найдите площадь шестиугольника $AKLCMN$, если точки K, L, M, N принадлежат соответственно сторонам AB, BC, CD, AD и $\frac{|AK|}{|KB|}=2$, $\frac{|BL|}{|LC|}=\frac{1}{3}$, $\frac{|CM|}{|MD|}=1$, $\frac{|DN|}{|NA|}=\frac{1}{5}$.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0.$$

3. Решить уравнение

$$2\sin 3x\cdot\sin x+(3\sqrt{2}-1)\cos 2x=3.$$

4. Найти все значения параметра a, для которых уравнение

$$\cos x=\frac{a-1{,}5}{2-0{,}5a}$$

имеет решения.

Физика

Письменный экзамен

Медицинский факультет

Вариант 1

1. Равномерное движение по окружности. Линейная и угловая скорости; связь между ними. Единица угловой скорости. Центростремительное ускорение.

2. Переменный ток. Генератор переменного тока. Период и частота переменного тока. Действующие значения напряжения и силы тока. Использование диода для выпрямления переменного тока.

3. В калориметре находится $m_1=0{,}4$ кг воды при температуре $t_1=10$°C. В воду кладут $m_2=0{,}6$ кг льда при температуре $t_2=-40$°C. Какая температура установится в калориметре, если его теплоемкость ничтожно мала? Удельная теплоемкость воды $c_1=4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплоемкость льда $c_2=2{,}1$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=0{,}33$ МДж/кг.

4. Расстояние между источником света, находящимся на оптической оси линзы, и экраном $l=0{,}5$ м. Линза дает четкое изображение источника при двух ее положениях, расстояние между которыми $a=0{,}1$ м. Каково фокусное расстояние линзы? Показать ход лучей.

Вариант 2

1. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Понятие о потенциале. Единица потенциала. Потенциал поля точечного заряда (без вывода). Разность потенциалов. Связь разности потенциалов с напряженностью для однородного поля.

2. Дисперсия света. Спектр. Спектроскоп. Инфракрасная и ультрафиолетовая части спектра. Спектры испускания. Спектры поглощения. Понятие о спектральном анализе.

3. Из точки, находящейся в 2 км к востоку и в 1 км к северу от перекрестка, вышел турист и за $t=1$ ч прошел путь $s=5$ км. Прямая, проведенная в восточном направлении, составляет с направлением движения туриста угол $\alpha=135$°. Определите, где находился турист после часа пути.

4. Определите сопротивление подводящих проводов от источника с напряжением $U=120$ В, если при коротком замыкании предохранитель из свинцовой проволоки сечением $S=1$ мм² и длиной $l=2$ см плавится за $\tau=0{,}03$ с. Начальная температура предохранителя $t_0=27$°C. Удельная теплоемкость свинца $c=0{,}13\cdot10^3$ Дж/(кг · К), температура плавления $T=600$ К, плотность $D=11{,}3\times\times10^3$ кг/м³, удельное сопротивление $\varrho=2{,}1\cdot10^{-7}$ Ом · м, удельная теплота плавления $\lambda=0{,}25\cdot10^5$ Дж/кг.

Б. Алексеюнас, А. Казлаускене, Э. Мисевичюс

Ю. Первин, А. Салтовский

Как работает процессор

Архитектура ЭВМ

Современная электронная вычислительная машина — это сложный комплекс устройств и элементов, восхищающий своим технологическим совершенством и разнообразием физических принципов работы. Давайте, посмотрим на машину глазами программиста: познакомимся с основными ее устройствами, их назначением, существующими между ними связями, принципами действия этих устройств.

На упрощенной блок-схеме (рис. 1) представлены следующие устройства, составляющие ЭВМ:

— *Арифметико-логическое устройство* (АЛУ) выполняет арифметические и логические действия над данными, поступающими из Памяти. АЛУ, входящие в состав современных ЭВМ, могут выполнять до ста и более различных действий (операций). Кроме обычных арифметических — сложить, вычесть, умножить, разделить,— в наборе операций, которыми располагает АЛУ, содержатся операции, позволяющие редактировать информацию. Основная задача этого устройства — преобразование информации, получаемой из памяти.

— *Память* (П) (или *запоминающее устройство* — см. «Квант», 1980, № 4) хранит данные, а также информацию, управляющую всеми работами в ЭВМ, т. е. *программу.*

— *Устройства ввода-вывода* (УВВ) являются органами общения машины с человеком. С помощью УВВ человек вводит в ЭВМ программу и данные, необходимые для выполнения программы, а также получает результаты в удобной для дальнейшей работы форме: таблицы, графики, схемы и чертежи. Устройства ввода — глаза и уши машины, а устройства вывода — ее язык и руки.

— *Устройство управления* (УУ) координирует работу ЭВМ в целом и ведает «дипломатией» взаимоотношений между отдельными устройствами.

Арифметические и логические операции выполняются в АЛУ с высокой скоростью, исчисляемой в современных ЭВМ от сотен тысяч до десятков миллионов операций в секунду. Для обеспечения высокой скорости работы машины в целом, процессы, связанные с передачей информации между устройствами — смена данных, получение нового задания, запись результата — полностью автоматизированы; этим и управляет УУ. Устройство управления — своеобразный дирижер ансамбля устройств, составляющих ЭВМ. «Нотной партитурой» дирижеру служит программа, предварительно записанная в памяти. Каждый такт пьесы, разыгрываемой под руководством УУ, является законченным элементарным действием: сложение двух чисел, сравнение двух величин и т. д. Именно УУ «настра-

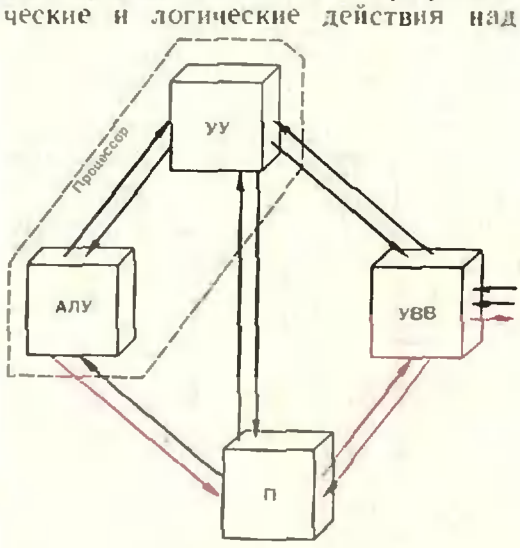


Рис. 1. Архитектура ЭВМ.

ивает» АЛУ на выполнение конкретной операции, «заботится» о том, чтобы из памяти была извлечена информация, необходимая для этой операции, не «забывает» по окончании действия записать результат в память либо переслать в распоряжение УВВ.

В семействе устройств, составляющих ЭВМ, наиболее технически сложными оказались отношения между УУ и АЛУ. Дело в том, что УУ не только «настраивает» АЛУ на выполнение определенной операции, например сравнение двух величин, но и «интересуется» результатом, в зависимости от значения этого результата принимает решение о дальнейшем ходе выполнения программы. Взаимоотношения АЛУ и УУ настолько тесны и сложны, что эти два устройства часто объединяют в одну группу, которую называют *Процессором*.

Логическую организацию машины называют ее *архитектурой*. Представленная на рисунке 1 архитектура считается классической. Она предложена в 1947 году американским ученым фон Нейманом и содержит в себе основные черты современных архитектурных решений ЭВМ.

Что такое управляющая информация?

В первом приближении работу ЭВМ можно представить так:

— из памяти извлекается *управляющая информация*. Как правило, это содержимое одной ее ячейки — одно машинное слово. В этом управляющем слове закодирована исчерпывающая инструкция о действиях устройств машины на ближайший отрезок времени — на один такт ее работы;

— УУ расшифровывает информацию, содержащуюся в управляющем слове, и в зависимости от значения этого слова выдает участвующим в операции устройствам ЭВМ приказы о конкретных действиях;

— после того как устройства выполняют порученную им работу, они сообщают об этом УУ; тогда либо из памяти будет извлечено следующее управляющее слово, либо движение информационных потоков в ЭВМ будет приостановлено.

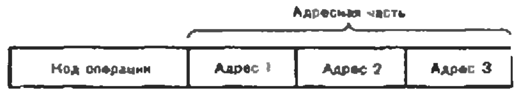


Рис. 2. Примерный формат трехадресной команды.

Управляющее слово называют *командой*. Последовательность команд представляет собой *программу на машинном языке*. Команды и данные, предназначенные для обработки, а также полученные результаты хранятся в памяти.

Каждая ячейка памяти, в том числе, ячейка, хранящая команду, имеет *адрес* (номер этой ячейки). По адресу в памяти разыскивается любая информация, точно так же как книга разыскивается в библиотеке по ее индексу, а оставленное на хранение в гардеробе пальто — по выданному номерку.

Команда чаще всего составляется из нескольких компонент (рис. 2).

Характер управляющей информации, которую команда поставляет для ЭВМ, определяется прежде всего *кодом операции*. Обычно это небольшая часть формата команды, занимающая для многих моделей ЭВМ 6—8 битов. Кроме кода операции, команда содержит следующую управляющую информацию:

— *адресную часть*, включающую адреса данных, над которыми надо произвести операцию, и адрес результата;

— явным или неявным образом задается *адрес следующей команды*, которую надо будет извлечь из памяти и принять к исполнению после выполнения текущей (выполняемой в данный момент) команды.

Из чего состоят устройства машины?

Различные устройства машины представляют собой комбинации большого числа элементов — «кирпичиков». Разнообразие элементов, однако, не столь велико. Поэтому для более подробного знакомства с работой устройств ЭВМ необходимо узнать принципы действия этих элементов. Рассматривая устройство памяти («Квант», 1980, № 4), читатель, по-

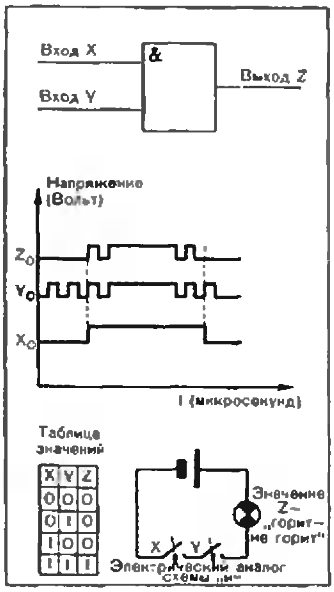


Рис. 3а. Схема совпадения («и»).

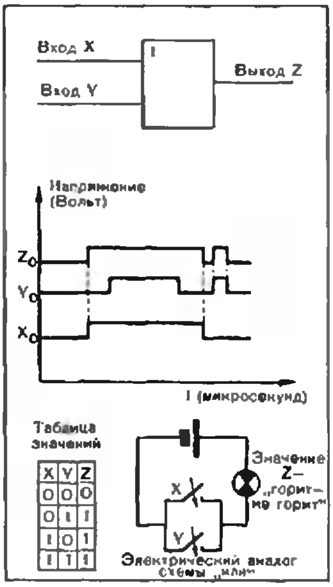


Рис. 3б. Схема сборки («или»).

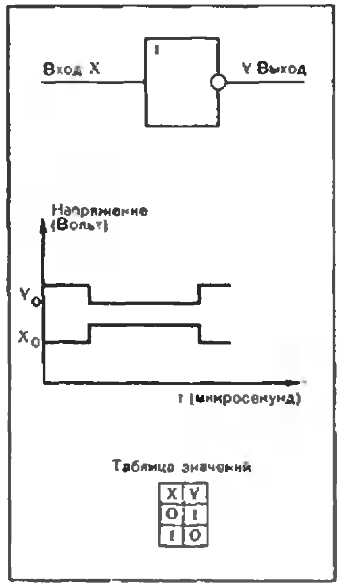


Рис. 3в. Схема инвертора («не»).

видимому, обратил внимание на дискретную природу хранимой в машине информации: в конечном итоге все сводится к двум состояниям, именуемым 0 и 1. Различные конструкции элементов могут давать лишь разные технические реализации, гарантирующие распознавание двух таких состояний. Например, два уровня напряжения — «высокий» и «низкий» — могут распознаваться электронными схемами так, что «высокое» означает единицу, а «низкое» — нуль.

Одним из простейших элементов, предназначенным для запоминания одного бита информации, является *триггер*, весьма похожий по принципу действия на обычный двухпозиционный выключатель, с той лишь разницей, что управляется он не вручную, а единичным электрическим сигналом, поступающим на его вход: если триггер находился в нулевом состоянии, то он «помнит» это состояние до поступления очередного единичного сигнала; если же триггер был в единичном состоянии, то поступивший на его вход единичный сигнал «сбрасывает» его в нулевое состояние, тоже запоминаемое на сколь угодно долгое время до прихода следующего единичного сигнала.

Способность триггера к хранению информации широко используется в различных запоминающих устройствах, простейшим из которых является *регистр* — группа триггеров, объединенная для оперативного хранения фиксированного числа битов, в частности машинного слова. Регистр является удобным средством для предварительного хранения информации. С помощью регистров эффективно согласуются информационные обмены между устройствами ЭВМ, работающими зачастую с различными скоростями.

В процессе выполнения команд УУ переключает управляющие сигналы и потоки информации. Переключение осуществляется с помощью различных электронных схем. Наиболее простыми и распространенными из них являются:

— *схема совпадения* («и») — сигнал, соответствующий значению «1», появится на выходе схемы «и» только тогда, когда значение всех входных сигналов будет соответствовать значению «1» (рис. 3а);

— *схема сборки* («или») — эта схема менее «привередлива» к характеру входной информации: значение «1» появляется на ее выходе каждый раз, когда хотя бы на одном входе появится значение «1» (рис. 3б);

— *схема инвертора* («не») вырабатывает на выходе значение, противоположное входному. Получаемое

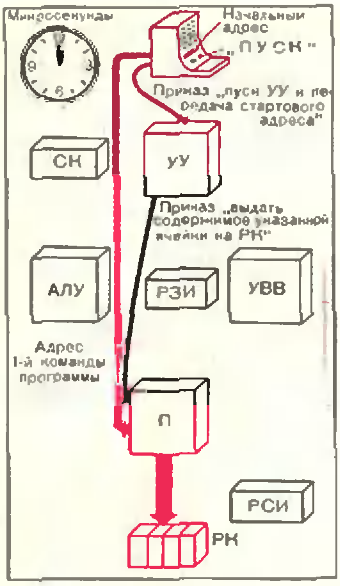


Рис. 4а. Выборка команд.

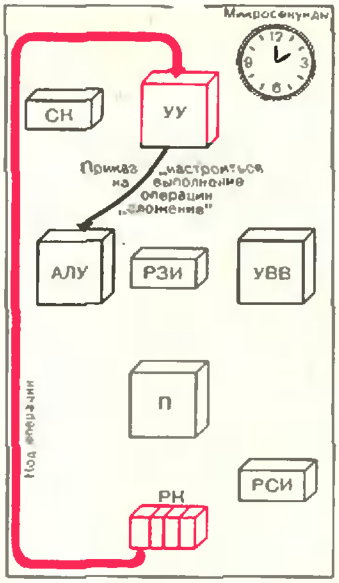


Рис. 4б. Дешифрация кода операции.

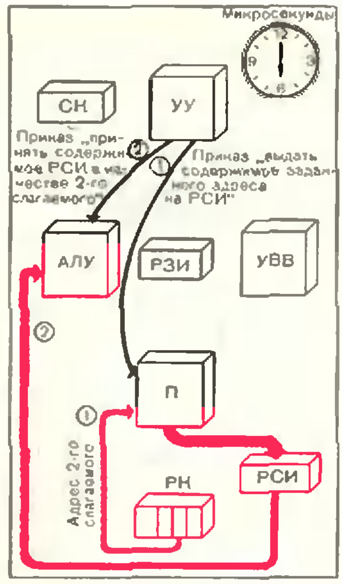


Рис. 4в. Пересылка 1-го слагаемого в АЛУ.

с помощью инверторов «негативное» изображение информации (рис. 3в), используется, в частности, для выполнения операции *вычитание*.

Элементы «и», «или», «не» используются при создании *функциональных блоков*, которые являются компонентами устройств ЭВМ: с помощью этих элементов возможно создание устройств с любыми наперед заданными свойствами. Характерной чертой работы функциональных блоков является их узкая специализация, обеспечивающая выполнение каждым блоком строго очерченного круга обязанностей. Широкое применение при создании отдельных устройств ЭВМ нашли следующие функциональные блоки:

— *сумматор* — сердце АЛУ: сумматор получает на входы двоичные представления двух чисел и выдает на выходе двоичное представление их суммы;

— *шифратор* — преобразует сигнал на одном из своих входов в соответствующий набор сигналов на выходе (например, в код операции);

— *дешифратор* — выполняет функцию, обратную действиям шифратора, то есть на каждую входную комбинацию сигналов выдает сигнал только на одну выходную линию; дешифратор используется, например, в УУ для расшифровки кода операции команды;

— *счетчик* — считает число дискретных сигналов, которые появляются на его входе; счетчик, как и регистр, состоит из конечного числа триггеров.

Процессор выполняет команду

Процессы, происходящие в машине при отработке команды, иллюстрируются рисунками 4а—4е. Это своеобразные стоп-кадры события, сюжет которого — отработка одной команды. Процессы, как это видно по «часам», фигурирующим на каждом рисунке, протекают во времени. Высокая общая скорость работы ЭВМ потребовала жесткой регламентации времени на каждый информационный обмен в отдельности. Метрономом машины, ее внутренними «часами», служит так называемый *генератор тактовой частоты*.

Перед началом работы оператор ЭВМ подготавливает с пульта стартовую информацию — адрес команды, исполняемой в данной программе самой первой. Приказ «пуск», который оператор дает машине, относится прежде всего к УУ (рис. 4а). Далее события развертываются следующим образом:

— прежде всего в специальный *счетчик команд* (СК) попадает ад-

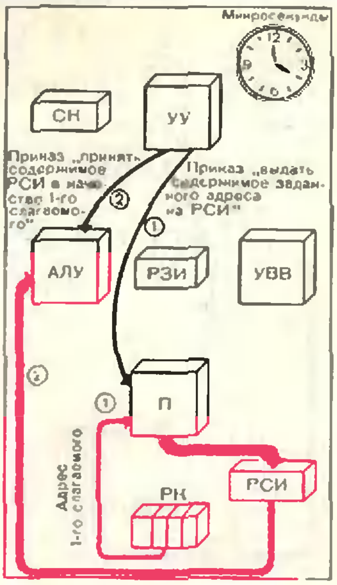


Рис. 4г. Пересылка 2-го слагаемого в АЛУ.

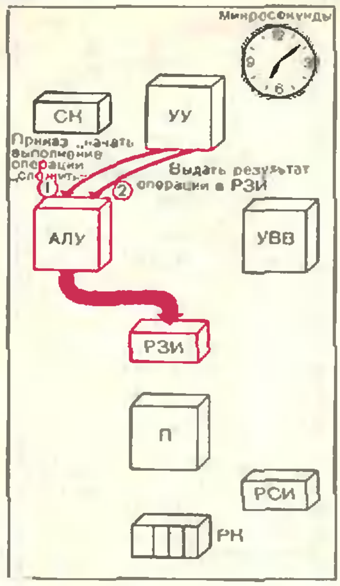


Рис. 4д. Выполнение операции.

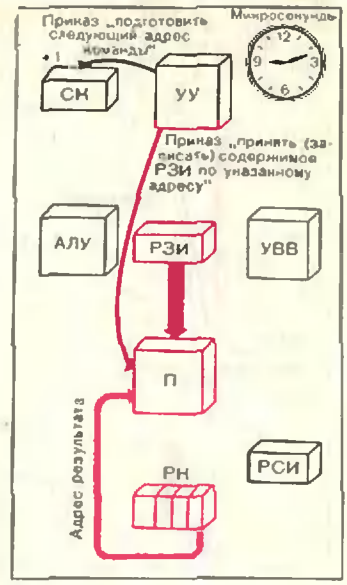


Рис. 4е. Запись результата операции.

рес первой выполняемой команды программы; тем самым определяется место в памяти, откуда можно извлечь обрабатываемую команду;

— получив приказ о начале работы, УУ передает в память в качестве адреса разыскиваемой информации содержимое счетчика команд;

— эта передача сопровождается приказом для памяти «выдать содержимое указанной ячейки на регистр команд»;

— после этого из ячейки памяти с адресом, равным содержимому СК, считывается команда, размещаемая в *регистре команд* (РК);

— УУ с помощью дешифратора расшифровывает код операции команды и, настраивая АЛУ на выполнение операции (в нашем примере — «сложить два числа»), начинает отработку алгоритма команды (рис. 4б);

— адрес первого слагаемого (первый адрес в адресной части команды, расположенной в РК) передается в ЗУ; УУ требует выдать содержимое этого адреса в АЛУ; перевалочным пунктом в этой передаче служит *регистр считываемой информации* (РСИ) (рис. 4в);

— после того как АЛУ примет содержимое РСИ в качестве первого слагаемого, УУ начнет выборку следующего слагаемого. Для этого в память будет передан номер ячейки, хранящей второе слагаемое (второй адрес в адресной части команды из РК), и содержимое этой ячейки будет передано через РСИ в АЛУ (рис. 4г);

— получив оба слагаемых, АЛУ с помощью сумматора выполняет операцию сложения и передает результат в *регистр записываемой информации* (РЗИ) (рис. 4д);

— финалом отработки команды является запись содержимого РЗИ (результата) по адресу результата (третий адрес в адресной части команды в РК) (рис. 4е).

Как определяется порядок выполнения команд?

Следующая команда будет извлечена из памяти автоматически: завершение отработки команды фиксируется прибавлением 1 к содержимому счетчика команд, поэтому следующей выполняемой командой станет та, что хранится в соседней, следующей ячейке. Изменить эту последовательность способны две специальные команды — *безусловный переход* и *условный переход*. Их основное назначение состоит в изменении содержимого счетчика команд. Команда безусловного перехода содержит в своей адресной части информацию об адресе следующей команды. Эта информация заменяет (вытесняя) содержимое счетчика команд, невзирая ни на какие ситуации, которые могли произойти при отработке предыдущей команды. Напротив, команда условного перехода «интересуется» результатами работы предыдущей команды: в зависимости от значения этих результатов она выбирает ту или иную команду в качестве следующей: адреса возможных следующих команд присутствуют (явно или неявно) в адресной части команды условного перехода.

Почему нужны прерывания в ходе выполнения программы?

Кроме такого преднамеренного способа изменения последовательности команд, которым вооружают программиста команды безусловного и условного переходов, существуют «аппаратные» (внутренние машинные) способы изменения обычной последовательности, которые позволяют по некоторым важным и чрезвычайным причинам прерывать выполнение программы и начать выполнение другой программы. При появлении причины, вызвавшей *прерывание*, прежде всего изменяется содержимое счетчика команд: на него поступает *адрес прерывания*. Дело в том, что обычно для каждого класса причин отводится «свой» фиксированный адрес; его обычно «находят» с помощью шифратора. В фиксированных адресах прерываний содержатся команды перехода на подпрограмму (обработки соответствующего прерывания). Эти команды — «ближайшие родственники» уже известной команды безусловного перехода. Замечательный союз программных и аппаратных средств, предназначенных для быстрой реакции машины на чрезвычайные события, называют *системой прерываний*. Действия этого союза направлены на то, чтобы «сфотографировать» события, происходившие в ЭВМ в момент возникновения прерывания. «Фотография» помогает восстановить работу машины в прежней последовательности после того, как причины прерывания будут удовлетворены или ликвидированы. Телефонный звонок прерывает чтение книги, и вы, переговорив с приятелем, возвращаетесь к книге. Именно к книге, а не к самовару. Мало того, вы продолжаете читать именно с той страницы, на которой было прервано чтение. ЭВМ «узнает» причину прерывания так же, как вы узнаете голос одного из друзей.

Причин для прерываний может быть много. Вот некоторые из них:

— в машине осуществляется постоянный контроль за достоверностью передаваемой или принимаемой информации: обнаружена ошибка;

— произошла поломка оборудования;

— в программе есть ошибка.

Возможность прервать на время исполняемую программу позволяет управлять с помощью ЭВМ процессами, появление которых во времени трудно предугадать.

Все ли так просто?

Рассказывая о событиях, происходящих в процессоре во время выполнения программы, мы договорились считать управляющую информацию — команду (рис. 2) — состоящей из кода операции и трех адресов в адресной части. Нетрудно понять, что такой вид команды оказывает свое влияние на весь процесс работы ЭВМ. Машины с таким форматом команды называются *трехадресными*. Однако трехадресные машины — не единственный класс ЭВМ. В следующих номерах «Кванта» мы познакомим вас с ЭВМ разной адресности — одно- и двухадресными, полутораадресными и даже «безадресными» машинами. На этих машинах выполнение такой команды, как сложение, конечно же, сложнее.

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов.
Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

О силе шахматных фигур писали многие известные шахматисты, в том числе чемпионы мира Эм. Ласкер и Х. Р. Капабланка. В учебниках приводятся различные шкалы для сравнения силы фигур, например: $F_п=1$, $F_к=F_с=3$, $F_л=5$, $F_ф=9$; или: $F_п=1$, $F_к=3$, $F_с=3{,}5$, $F_л=5{,}5$, $F_ф=10$; или: $F_п=1$, $F_к=F_с=3{,}5$, $F_л=5$, $F_ф=10$.

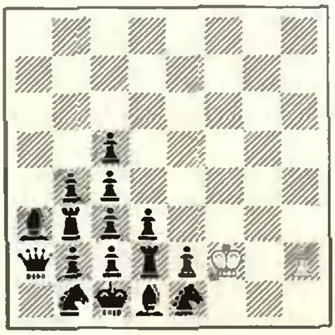
Эти шкалы построены на основе богатого опыта шахматистов и на практике вполне оправдываются. Существует и чисто математический способ оценки силы шахматных фигур, он описан в «Кванте», 1974, № 6.

Однако в том и состоит прелесть шахматной игры, что мы то и дело сталкиваемся в ней с нарушениями различных правил. Одними арифметическими подсчетами здесь не обойдешься. В шахматной композиции имеется неограниченный простор для создания, как говорят математики, «противоречащих примеров». Так, пешка — самый скромный член шахматной семьи — в конкретной ситуации может оказаться сильнее целой армии неприятельских фигур.

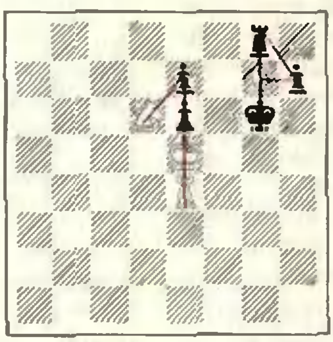
Предлагаемые две задачи венгерского шахматного композитора О. Блаты служат прекрасной иллюстрацией того, как рушатся все представления о силе шахматных фигур.

Своей необыкновенной популярностью шахматы, прежде всего, обязаны красивым и эффектным комбинациям, содержащимся в них. Наибольшее впечатление на любителей шахмат производят такие комбинации, в которых жертвуется самая сильная шахматная фигура — ферзь. Вот одна знаменитая комбинация с жертвой ферзя.

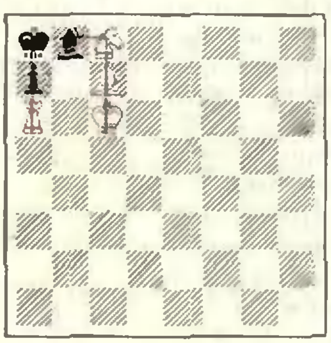
1. О. Блаты. Мат в 12 ходов.



2. О. Блаты. Мат в 16 ходов.

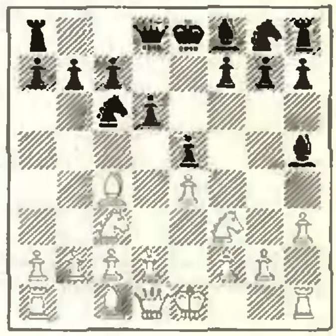


3. Э. Погосянц. 1 Мая. Белые начинают и выигрывают.



4. Э. Погосянц. День Победы. Черные начинают, после чего белые дают мат в 4 хода.

1. e4 e5 2. Kf3 d6 (этот ответ черных определяет защиту Филидора) **3. Cc4 Kc6 4. Kc3 Cg4 5. h3 Ch5.**



6. K:e5!! C:d1. Конечно, принятие жертвы ферзя приводит к катастрофе, но зато черные избавляют себя от скучной защиты в позиции, возникающей после 6...de 7. Ф:h5 или 6...K:e5 7. Ф:h5 K:c4 8. Фb5+ и 9. Ф:c4. **7. C:f7+ Kpe7 8. Kd5×.** Эта популярная матовая комбинация, которая часто встречается в сеансах одновременной игры, называется «мат Легаля» — впервые ее применил француз Легаль еще в 1750 году! Любопытно, что в ее первом, авторском исполнении она была осуществлена некорректно. Дело в том, что ходы 5. h3 Ch5 не были включены в партию и после преждевременного 5. K:e5 черным надо было не соблазниться ферзем — 5...C:d1, а сыграть 5...K:e5 и спокойно остаться с лишней фигурой.

В прошлом номере «Кванта» мы рассказывали о так называемых символических (изобразительных) задачах на шахматной доске. Обратимся еще раз к этому необычному жанру шахматной композиции. Задача 3 посвящена празднику 1 Мая (фигуры изображают цифру 1 и флажок), а задача 4 — Дню Победы (буква П). Во второй задаче начинают черные (в противном случае позиция не могла бы возникнуть на доске), после чего их король получает мат в 4 хода. Это символизирует тот факт, что войну завязали черные (фашисты), длилась она четыре года и закончилась их полным разгромом.

Читатели советуют

1. а) $\sin(\sin x)$; б) $\sqrt{2+x^2}$; в) $-x^4+2x^2$.
2. $-x+3$.
3. а) $\{-(\sqrt{5}+1)/2;\ (\sqrt{5}-1)/2\}$ и $\{-(\sqrt{5}+1)/2;\ (\sqrt{5}-1)/2;\ 0;\ 1\}$;
б) $\{3/2\}$ и $\mathbf{R}$.
6. $\{(-1;\ -1;\ -1)\}$.
7. $\{(0;\ 0;\ 0),\ (1;\ 1;\ 1)\}$.
8. $\{(-2;\ -2;\ -2)\}$.
9. $a=e^{1/e}$. Указание. Так как функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ взаимно обратные, их графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Поэтому точка касания этих графиков является одновременно точкой касания графика функции $y=a^x$ с прямой $y=x$.
10. $\{-2;\ (\sqrt{13}-1)/2;\ (\sqrt{13}+1)/2\}$. Указание. $x^3+x^2-5x-6=(x^3+2x^2)-(x^2+2x)-(3x+6)$.
11. $\{3-2\sqrt{3};\ 1;\ 3;\ 3+2\sqrt{3}\}$. Указание. $x^4-10x^3+24x^2-6x-9=x^2(x^2-10x+25)-(x^2+6x+9)$.
12. Допустим, что последовательность (x_n) сходится и имеет пределом число $a<0$. Воспользуемся определением предела последовательности при $\varepsilon=1/2$; тогда найдется такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство

$$|\sin n-a|<1/2.$$

Покажем, что это неверно: существует натуральное число k такое, что $k>N$ и в то же время

$$\sin k-a>1/2.$$

Решая неравенство $\sin x>1/2$, легко убедиться, что оно верно, в частности, на интервале

$$\left]\frac{\pi}{6}+2N\pi;\ \frac{5\pi}{6}+2N\pi\right[.$$

Поскольку длина этого интервала равна $2\pi/3>1$, в нем лежит по крайней мере одно целое число; обозначим его k. Так расстояние от начала координат до левого конца этого интервала равно $\frac{\pi}{6}+2N\pi>N$, очевидно, $k>N$. Таким образом, существует натуральное число $k>N$ такое, что $\sin k>1/2$, а потому

$$\sin k-a>\frac{1}{2}-a>\frac{1}{2}$$

(ибо $a<0$). Аналогично рассматривается случай $a\geqslant 0$.

13. $\{9\}$.

14. $\dfrac{3\pi+2\sqrt{3}}{\pi-\sqrt{3}}S$.

XVI лингвистическая олимпиада

(см. «Квант» № 4)

I тур

2. Надо (по смыслу, принадлежности к разным частям речи и написанию) составить из данных слов две таблички:

пилить	пильщик	пила
красить	маляр	—
—	косарь	—
копать	—	лопата

и

xerxva	xerxi	mxerxavi
γebva	—	mγebavi
—	—	mtibavi
barva	bari	—

и привести их в соответствие. Интересно, что семиклассник из Москвы В. Меликов нашел второе решение, исходя из того, что «косарь» — инструмент (тогда это слово попадает в другую колонку).

3. Знаки вопросов надо заменить так: 6 — серебро, 7 — ворон, 8 — горох, 9 — ворона, 10 — колос, 11 — город, 12 — град, 13 — брâдат, 14 — прâг, 15 — прâх, 16 — влâс.

4. 624, 232, 333.

7. Решается аналогично задаче 2, при этом надо заметить, что название дня недели состоит из «Juma» и порядкового номера дня недели (начиная с субботы), отсюда находится перевод числа 1.

10. Счет идет от большого пальца левой руки (1) по пальцам, затем по руке и через голову до мизинца правой руки (27 — kay-keli), для частей справа к названию той же части слева добавляется kay-.

15. Легко видеть, что для каждого человека сначала пишется отчество, а затем имя. Надо составить части графа (родитель и его возможные дети), а затем «уложить» их в требуемый граф. Задача имеет два решения (2-ж, 8-л или 2-л, 8-ж, остальное однозначно, причем родители Тикон и Падей встречаются дважды).

II тур

2. Переводы венгерских слов (по порядку) выглядят так: о ком-нибудь (ед. ч.); кто (множ. ч.); из этих; от кого (множ. ч.); об этих; любые; из кого (множ. ч.); кто (ед. ч.); из кого (ед. ч.); на этом; о ком-нибудь (множ. ч.); от кого (ед. ч.).

3. См. рис. 1.

7. Переводы тайских слов (по порядку) выглядят так: 3 акации; 4 акации; 1 хулиган; 4 людоедки; 1 обезьяна; 1 китайская роза; 3 выдры; 2 лошади; 3 пленника; 4 лошади; 2 орхидеи; 4 хулигана; 1 слесарь; 3 слесаря, 3 лотоса; 4 слесаря; 3 обезьяны.

13. Пропуски (по порядку) заполняются так: Мися-кун; нэмуримас; Ээ, Мися-кун; — кун, Боря-ва киси-ни цурука?; Инэ, Андорэй-сан, Боря-ва боото-ни цуримас. Боото-ва.

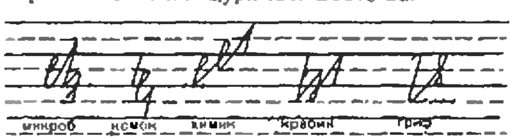


Рис. 1.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 4)

1. 1. Фd8 Крf7 2. Фg5 Крf8 3. Фf6×.
2. 1. Фс5 Крg6 2. f8Л Крh6 3. Лf6×.
3. 1. Фh3 Крg5 2. Фf3 Крg6 3. Фg4× (2...Крh4 3. Сf6×).
4. 1. Фh7+ Крс1 2. Фс7+ Крd1 3. Фi1+ Крс2 4. Фi8+ Крс1 5. Фс8+ Крd1 6. Фj1+ Крс2 7. Фj9+ Крс1 8. Фс9+ Крd1 9. Фk1+ Крс2 10. Фk10+ Крс1 11. Фс10+ Крd1 12. Фl1+ Крс2 13. Фg6+ Крс1 14. Фс6+ Крd1 15. Фh1+ Крс2 16. Фе4+ Крс1 17. Фс4+ Крd1 18. Фf1+ Крс2 19. Фd3+ Крс1 20. Ф:d2+ Крb1 21. Фd1×!

5. Фигурам в этом «пистолете» очень тесно, и поэтому в течение 20 ходов механизм приводится в действие, и только затем раздается выстрел! Перечислим белые фигуры в том порядке, в каком они натягивают пружину (в распоряжении черного короля имеется лишь два свободных поля, на которых он и ждет разрядки): **К, Л, К, Л, С, Л, К, Л, К, С, К, Л, К, Л, Кр, К, Кр, Л, Кр, К** и теперь — **21. Л:С×.**

6. 1. с8Л! Кра6 2. Ла8×.

Две задачи

(см. «Квант» № 4, 3-ю с. обложки)

1. Магнитная лента и клубок нитей. Справедливость утверждения следует из следующих соображений. Общая длина магнитофонной ленты остается постоянной во время перемотки. Поэтому ее «боковая площадь» (рис. 2), равная произведению длины ленты на ее толщину, тоже остается постоянной. Эту площадь как раз и определяет суммарная площадь $\pi R^2 + \pi r^2$ кругов, заполняемых намотанными частями ленты. Наличие катушек в центре бобин, очевидно, не нарушает «закона сохранения». В случае клубков в роли площадей выступают объемы клубков. Пустоты между нитками образуют примерно одинаковые доли от объема клубка, а без пустот сумма объемов клубков равна объему всей нитки, постоянному во время перемотки.

2. Маятник. Наибольший возможный период колебания маятника равен 4 секундам. За 1 секунду маятник уходит из положения *1* влево и обратно, а из положения *2* — вправо и обратно (см. рисунок 3). Еще две секунды расходуются на переходы из *1* в *2* и из *2* в *1*. Заметим, что возможно бесконечное множество периодов колебания маятника, меньших чем 4 секунды. Эти периоды равны $2/n$ секунд, где n — произвольное нечетное число.

Рис. 2.

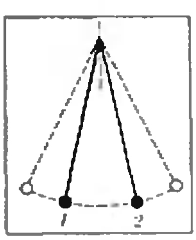


Рис. 3.

Чайн-намбер «Восьмое марта»

(см. «Квант» № 3, 3-ю с. обложки)

Квадраты целых чисел могут оканчиваться цифрами 0, 1, 4, 5, 6, 9. Поэтому мы должны рассмотреть только те из них, которые и начинаются этими же цифрами (за исключением нуля). Таких квадратов одиннадцать:

121, 144, 169, 196, 441, 484, 529,
576, 625, 676, 961.

Так как нам нужно образовать замкнутую цепочку, количества чисел, начинающихся с некоторой цифры, и чисел, оканчивающихся той же цифрой, должны быть одинаковы. Исключить два лишних числа можно двумя способами:

а) исключаем 169 и 576;
б) исключаем 196 и 529.

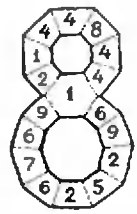


Рис. 4.

Рассмотрим вариант а). Ясно, что числу 961 может предшествовать только число 529, а числу 529 — число 625. Перед числом 625 может стоять либо 196, либо 676. Очевидно, нужно поставить число 676, иначе для него не останется места. Итак, получаем цепочку

196—676—625—529—961.

Оставшиеся числа образуют цепочку

121—144—484—441,

которая легко «сцепляется» с предыдущей (см. рисунок 4).

В варианте же б) образуется замкнутая цепочка 625—576—676, которая не может быть сцеплена с оставшимися числами.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Э. Назаров, И. Смирнова, Л. Черниевская

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Н. Румянцева, Е. Сидоркина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 19.03.80
Подписано к печати 17.04.80
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,38 Т-08140
Цена 30 коп. Заказ 56
Тираж 267 961 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ДНЮ ПОБЕДЫ

35 лет отделяют наш народ от того незабываемого дня, когда впервые была отпразднована победа над фашистской Германией. За столь недолгий срок советская филателия неоднократно отмечала этот всенародный праздник выпуском отдельных почтовых марок и специальных серий. Первой маркой, посвященной этому выдающемуся событию, была марка с изображением ордена Победы (выпущенная в 1943 году), на которой сделана надпечатка «Праздник Победы 9 мая 1945 года». Она поступила в почтовое обращение в июне 1945 года. Мы воспроизводим ее на помещенном здесь почтовом блоке 1975 года. Вместе с ним приведены также марки разных лет, посвященные этому празднику.

В. Рудов

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Скульптура Е. В. Вучетича «Перекуем мечи на орала»